Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

0660.04.01;1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЮНИТА 4

РЯДЫ. РЯДЫ ФУРЬЕ

Москва 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН 4
ЛИТЕРАТУРА 5
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР 6
Глава 1. Числовые ряды 6
§1. Определение ряда. Сходимость. Сумма ряда. Примеры 6
§2. Необходимый признак сходимости ряда 14
§3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов 17
§4. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница 27
§5. Сходимость произвольных рядов 30
Глава 2. Степенные ряды. Ряды Тейлора 32
§1. Функциональные ряды 32
§2. Степенные ряды 37
§3. Ряды Тейлора 45
§4. Разложение некоторых элементарных функций в ряды Маклорена 50
§4. Биномиальный ряд 53
§5. Разложение в ряд Маклорена функций ln(1+x) и arctg x . 54
§6. Приложение рядов к приближенным вычислениям . . 56
Глава 3. Ряды Фурье 63
§1. Периодические функции 63
§2. Ортогональные системы 68
§3. Определение ряда Фурье 73
§4. Сходимость тригонометрического ряда Фурье 76
§5. Ряды Фурье четных и нечетных периодических функций 84
§6. Разложение в ряд Фурье периодических функций с произвольным периодом 95
§7. Комплексная форма ряда Фурье 104
§8. Экстремальное свойство частных сумм ряда Фурье 108
Исторические сведения 113
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ 116
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 129
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ 138
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ 142
ГЛОССАРИЙ*

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Числовые ряды. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

Степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. Функциональные ряды. Равномерно сходящиеся ряды и их свойства. Степенные ряды. Область сходимости ряда. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Формула Тейлора. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций e^x, $\cos x$, $\sin x$. Логарифмический ряд. Биномиальный ряд. Приложения рядов Тейлора и Маклорена.

Ряды Фурье. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональной системе. Ряд Фурье периодической функции по тригонометрической системе. Признак сходимости. Ряды Фурье четных и нечетных функций. Ряды Фурье функции периода 2ℓ. Ряды Фурье в комплексной форме. Экстремальное свойство частных сумм ряда Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

*1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2-х т. М., 1998.

*2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. М., 1971.

Дополнительная

*3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. М., 1969.

*4. Толстов Г.М. Ряды Фурье. М., 1980.

5. Шипачев В.С. Высшая математика. М., 1985.

6. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М., 1969.

7. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. М., 1973.

*8. Атанасян В.А., Виленкин Н.Я., Смолянский М.Л. Специальные главы математического анализа. М., 1966.

*9. Ellis R., Gulick D. Calculus, HBI, 1991.

*10. Хавинсон С.Я. Математический анализ. Юнита 1. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных. М.: СГУ, 2000.

11. Глаголева Р.Я., Росовский Л.Е. Математический анализ. Юнита 2. Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных. М.: СГУ, 2000.

12. Рубинштейн А.И. Математический анализ. Юнита 3. Дифференциальные уравнения. М.: СГУ, 2000.

*13. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. В 2-х т. М., 1970.

Примечание. Знаком (*) отмечены работы, на основе которых составлен тематический обзор.

ГЛАВА 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§1. Определение ряда. Сходимость. Сумма ряда. Примеры

Начнем со следующей задачи. Рассмотрим отрезок длины 2. Разделим его на два равных отрезка (каждый длины 1). Не трогая левого отрезка, разделим правый на два равных отрезка (каждый длины $\frac{1}{2}$). Правый из них разделим на два равных отрезка (каждый длины $\frac{1}{4}$). Продолжая этот процесс до бесконечности, приходим к разбиению отрезка длины 2 на отрезки длины $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ и т.д. Поэтому

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2. \qquad (1)$$

Это рассуждение было известно еще древним грекам, и философ Зенон, известый нам своими парадоксами (апориями), сохранившимися в трудах других писателей, оспаривал его законность. [Зенон Элейский (ок. 490 г. до н.э.) был последователем философа элейской школы Парменида, учившего, что бытие в своей сущности неизменно. Парадоксы Зенона можно интерпретировать как попытку доказать иллюзорность движения].

Один из парадоксов ("Быстроногий Ахиллес не догонит черепаху") утверждает, что бегущий человек никогда не сможет достичь цели, поскольку он должен сначала пробежать половину требуемой дистанции, затем половину оставшейся части дистанции, затем снова половину оставшейся части и т.д. Таким образом, он должен пробежать бесконечное множество расстояний, а это будет продолжаться вечно.

Конечно, Зенон видел бегунов, достигавших финиша, поэтому нам остается лишь догадываться, что он хотел сказать этим и другими своими парадоксами. Но если Зенон имел в виду, что сложение бесконечного множества чисел нельзя трактовать как процесс, аналогичный сложению конечного числа их, то он был, разумеется, прав.

Если бы мы попытались вычислить сумму (1), последовательно выполняя все указанные в ней сложения, то это, конечно, никогда бы

---

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

не окончилось. И все же мы чувствуем, что равенство (1) в некотором смысле верно. В чем же заключается его точный смысл?

Вычислим сумму n первых членов левой части, пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии. Имеем

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8},$$

и вообще,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Таким образом, разность между суммой n первых членов левой части (1) и числом 2 есть число, предел которого равен нулю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$. Можно рассматривать формулу (1) как сокращенную запись только что сделанного утверждения.

Приведем пример того, что с бесконечными суммами надо обращаться не так, как с конечными. Обозначим через S бесконечную сумму

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots=S. \qquad (2)$$

Бесконечная сумма

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots \qquad (3)$$

содержит те же члены, что и (2), и, по-видимому, должна иметь ту же сумму S. Но, с другой стороны, из (2) следует, что

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\ldots=\frac{1}{2}S.$$

Запишем (2) и только что полученное соотношение рядом друг с другом

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\ldots=S;$$

$$\frac{1}{2}\qquad-\frac{1}{4}\qquad+\frac{1}{6}\qquad-\frac{1}{8}\qquad+\frac{1}{10}-\ldots\qquad=\frac{1}{2}S$$

и затем сложим их. Получаем

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}S.$$

Каково же истинное значение суммы (2): S или $\frac{3}{2}S$? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо дать точное определение суммы в случае бесконечного числа слагаемых.

Пусть дана последовательность вещественных (действительных) чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

Числовым рядом называется выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (4)$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда, в частности a_1 – первый член ряда, a_2 – второй член ряда, a_n – *n-й* или *общий член ряда*.

Ряд считается заданным, если известен общий член ряда a_n как функция его номера: $a_n = f(n)$.

Приведем несколько примеров рядов:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$ общий член ряда $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$; (5)

$3+12+48+\ldots+3\cdot4^{n-1}+\ldots$ общий член ряда $a_n=3\cdot4^{n-1}$; (6)

$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$ общий член ряда $a_n=(-1)^{n-1}$; (7)

$1+1+1+\ldots+1+\ldots$ общий член ряда $a_n=1$. (8)

В дальнейшем мы часто будем записывать ряды в более компактном виде, используя символ Σ (греческая буква "сигма"):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Например, первый из написанных выше рядов можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Введем суммы конечного числа членов ряда

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n.$$

Сумма S_n первых n членов ряда называется *n-й* **частичной (частной) суммой ряда** (4). Ряд называется **сходящимся**, если существует конечный предел S последовательности его частичных сумм при неограниченном возрастании номера n, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Замечание. Для исследования сходимости последовательности $\{S_n\}$ можно использовать ранее доказанные критерии сходимости последовательности.

Предел последовательности частичных сумм сходящегося ряда называется **суммой ряда**. Если число S является суммой сходящегося ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, то пишут

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если конечный предел последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется **расходящимся**. Расходящийся ряд суммы не имеет.

Пример 1. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \qquad (9)$$

Решение. n-я частичная сумма ряда равна

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Учитывая, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n\right) = \infty.$$

Следовательно, в этом случае ряд расходится.

3. Если q = 1, то ряд (10) имеет вид

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots$$

и для него $S_n = n \cdot a$ и при $a \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

4. Если q = –1, то ряд (10) примет вид

$$a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n-1}a + \ldots$$

и в этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при n нечетном. Значит, при $a \neq 0$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

Геометрический ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$.

Например, в силу установленного правила рассмотренный выше ряд (5) сходится, а ряды (6)-(8) расходятся.

Пример 3. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot (0{,}25)^{n-1}$$

сходится.

Решение. Этот ряд является геометрическим рядом с q = 0,25 = 1/4. Поэтому его сумма равна (см. [11]):

$$S = 5\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}.$$

Отметим связь между геометрическим рядом и разложением действительного числа в десятичную дробь. Например, дробь 0,333333... определяется следующим образом

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n\right) = \infty.$$

Следовательно, в этом случае ряд расходится.

3. Если q = 1, то ряд (10) имеет вид

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots$$

и для него $S_n = n \cdot a$ и при $a \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

4. Если q = –1, то ряд (10) примет вид

$$a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n-1}a + \ldots$$

и в этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при n нечетном. Значит, при $a \neq 0$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

Геометрический ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q|<1$.

Например, в силу установленного правила рассмотренный выше ряд (5) сходится, а ряды (6)-(8) расходятся.

Пример 3. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5\cdot(0{,}25)^{n-1}$$

сходится.

Решение. Этот ряд является геометрическим рядом с q = 0,25 = 1/4. Поэтому его сумма равна (см. [11]):

$$S = 5\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 5\cdot\frac{4}{3} = \frac{20}{3}.$$

Отметим связь между геометрическим рядом и разложением действительного числа в десятичную дробь. Например, дробь 0,333333... определяется следующим образом

$$0{,}333333\ldots = 3\frac{1}{10} + 3\frac{1}{10^2} + 3\frac{1}{10^3} + \ldots + 3\frac{1}{10^n} + \ldots = 3\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

Геометрический ряд позволяет выразить произвольную периодическую десятичную дробь как рациональное число. Например,

$$0{,}3232\ldots = \frac{32}{100} + \frac{32}{100^2} + \frac{32}{100^3} + \ldots = \frac{32}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots\right) = \frac{32}{100}\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{32}{99}.$$

Замечание. Начальный индекс суммирования не обязательно должен начинаться с 1, иногда удобно рассматривать с индекса n = m (m = 0, 1, 2, ...):

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots$$

Установим *простейшие свойства сходящихся рядов.*

1. Если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится к сумме S, то и ряд $\lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda a_n + \ldots$, где λ – заданное число, также сходится и сумма его равна λS.

2. Если ряды

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (12)$$

и

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (13)$$

сходятся и имеют соответственно суммы S и $\overline{S}$, то ряд

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots,$$

получающийся почленным сложением данных рядов, также сходится и имеет сумму $S + \overline{S}$.

Свойства 1 и 2 непосредственно вытекают из определения суммы ряда и свойств пределов числовых последовательностей.

Например, для частичных сумм последнего ряда имеем

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = S_n + \overline{S}_n,$$

где S_n и $\overline{S}_n$ – частичные суммы рядов (12) и (13) соответственно.

3. Если ряд (4) сходится, то сходится и ряд, полученный из данного отбрасыванием (или приписыванием) конечного числа членов.

Доказательство. Пусть в сходящемся ряде

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n + \ldots \qquad (14)$$

отброшены k членов:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n + \ldots \qquad (15)$$

Обозначим через S_n сумму n первых членов ряда (14), через S_k – сумму k отброшенных членов ($k < n$) и через $t_{n-k} = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n$. Тогда

$$S_n = S_k + t_{n-k},$$

причем S_k – некоторое число, не зависящее от n. Отсюда следует, что при фиксированном k конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} t_{n-k}$. Это и означает, что ряд (15) сходится. Свойство доказано.

На сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов.

Замечания:

1. Конечно, если отбросить конечное число членов сходящегося ряда, то сумма его меняется.
2. В принципе можно отбрасывать члены с любыми номерами, лишь бы их было конечное число.

Ряд, полученный из данного отбрасыванием его первых n членов, называется **n-м остатком ряда**, т.е.

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k. \qquad (16)$$

4. Для того чтобы ряд (4) сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Действительно, если ряд (4) сходится и сумма его равна S, то

$$S = r_n + S_n,\ r_n = S - S_n.$$

Поэтому, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, и обратно. если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Замечание. В дальнейшем нас будет интересовать вопрос – сходится данный ряд или расходится, а не вычисление суммы ряда.

Выяснение сходимости (или расходимости) ряда путем вычисления $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ обычно приводит к принципиальным сложностям.

Поэтому задача будет ставиться следующим образом: найти эффективные условия для общего члена ряда, при которых данный ряд сходится или расходится.

§2. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ – сходится} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Доказательство. Обозначим через S сумму данного сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Рассмотрим его частичные суммы

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

и

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}.$$

Отсюда

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие (достаточный признак расходимости ряда). Если общий член ряда не стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Доказательство. Действительно, если бы данный ряд сходился, то по утверждению теоремы его общий член должен был бы стремиться к нулю, что противоречит условию теоремы. Это противоречие и доказывает утверждение.

Рассмотрим ряды:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \ldots + \frac{n}{2n+1} + \ldots$$

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + \ldots + 2 \cdot 5^n + \ldots$$

Так как пределы их общих членов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} 2 \cdot 5^n = \infty$$

не равны нулю, то данные ряды расходятся.

Замечание. Условие (1) является необходимым для сходимости числового ряда, но не является достаточным. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Пример 1 (гармонический ряд). Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad (2)$$

у которого каждый член является средним гармоническим для двух соседних членов.

Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Покажем, что гармонический ряд является расходящимся.

Докажем, что

$$S_{2^k} \geq 1 + k \cdot \frac{1}{2} \qquad (3)$$

для каждого k.

Для доказательства (3) отметим, что:

$$S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{2};$$

$$S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 1 + 2\frac{1}{2};$$

$$S_{2^3} = S_8 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) = 1 + 3\frac{1}{2}.$$

В общем случае разобьем слагаемые в S_{2^k} на группы и затем подставим наименьшее значение в каждой группе. Тогда получим, что сумма в каждой группе равна 1/2:

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots + (\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \ldots + (\frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}) = 1 + k\frac{1}{2}.$$

Поскольку $\lim_{k\to\infty}(1 + k\frac{1}{2}) = \infty$, то отсюда следует неограниченность частичных сумм гармонического ряда, значит,

гармонический ряд расходится.

Замечание. В дальнейшем мы покажем (см. интегральный признак сходимости), что следующий ряд (обобщенный гармонический ряд)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\,(p>1) \qquad (4)$$

сходится.

§3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (1)$$

у которого все члены положительны $a_n > 0$ (n = 1, 2, ...). Такие ряды будут называться *знакоположительными*.

Сформулируем следующее предложение из теории пределов.

Лемма 1 (о пределе монотонной последовательности). Если числовая последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, то она имеет предел.

Переходя к достаточным признакам сходимости, предварительно докажем следующее утверждение, которое будет использовано в дальнейшем.

Лемма 2. Для того чтобы знакоположительный ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена.

Доказательство.

Необходимость. Пусть ряд (1) сходится. По определению последовательность его частичных сумм имеет предел. Но если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Достаточность. Прежде всего отметим, что так как все члены ряда (1) положительны, то последовательность его частичных сумм является возрастающей

$$S_n < S_{n+1}\ (n = 1, 2, \ldots).$$

В силу леммы 1 последовательность частичных сумм ряда (1) имеет предел и, значит, ряд сходится.

Рассмотрим некоторые наиболее часто используемые признаки сходимости и расходимости знакоположительных рядов.

Теорема 1 (признак сравнения). Даны два знакоположительных ряда:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots\ (a_n>0); \qquad (2)$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots\ (b_n>0). \qquad (3)$$

Пусть члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда

$$a_n \le b_n \ (n = 1, 2, \ldots). \qquad (4)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если сходится ряд (3), то сходится и ряд (2);

2) если расходится ряд (2), то расходится и ряд (3).

Доказательство. Обозначим через S_n и $\overline{S}_n$ частичные суммы рядов (2) и (3) соответственно. Из неравенства (4) следует оценка $S_n \le \overline{S}_n$ (n = 1, 2, ...).

Докажем утверждения теоремы.

1. Если ряд (3) сходится к сумме $\overline{S}$, то в силу леммы 2 его частичные суммы ограничены. Ясно, что $\overline{S}_n \le \overline{S}$. Поэтому частичные суммы ряда (2) ограничены и, следовательно, ряд (2) сходится, и сумма его не превосходит $\overline{S}$.

2. Ряд (2) расходится и частичные суммы его возрастают, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = \infty$ и, следовательно, ряд (3) расходится.

Замечания.

1. Ряд (3) называется *мажорантным* рядом по отношению к ряду (2).

2. Для применения признака сравнения необходимо иметь стандартный набор сходящихся и расходящихся рядов. В нашем случае можно использовать, например, геометрический ряд, гармонический ряд и обобщенный гармонический ряд.

Пример 1. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2} = \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots + \frac{1}{3^n+2} + \ldots$$

сходится.

Решение. Геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится $\left(q = \frac{1}{3}\right)$. Поэтому сходимость исходного ряда следует из признака сравнения и неравенства $\frac{1}{3^n+2} \le \frac{1}{3^n}$ (для $n \ge 1$).

Пример 2. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$ расходится.

Решение. Расходимость исходного ряда вытекает из расходимости гармонического ряда и неравенства $\frac{1}{2n+1}\geq\frac{1}{3n}$ (n≥1), если воспользоваться признаком сравнения.

Теорема 2 (предельный признак сравнения). Предположим, что для рядов с положительными членами (2) и (3) выполняется предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=K$, где K – положительное число.

Тогда эти ряды ведут себя одинаково, т.е.:

а) если сходится ряд (2), то сходится и ряд (3);

б) если расходится ряд (2), то расходится и ряд (3).

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=K$, то существует натуральное число N такое, что $\frac{1}{2}K\leq\frac{a_n}{b_n}\leq 2K$ при n ≥ N. Отсюда $\frac{1}{2K}\leq\frac{b_n}{a_n}\leq\frac{2}{K}$.

Следовательно, $b_n\leq\frac{2}{K}a_n$ и $a_n\geq\frac{1}{2}Kb_n$ для n ≥ N. Из этих неравенств и признака сравнения следует, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то сходятся и ряды $\sum_{n=N}^{\infty}\frac{2}{K}a_n$, $\sum_{n=N}^{\infty}b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

Аналогично, если $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\infty$, то $\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2}Kb_n=\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$.

Пример 3. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3+4n^2-3}$ сходится.

Решение. Найдем ряд, сравнимый с данным рядом, сходимость которого известна. Так как нас интересует поведение членов ряда при

$n \to \infty$, то основную роль играют старшие члены в числителе и знаменателе. Поэтому сравним данный ряд с рядом, у которого общий член равен $\frac{1}{n^2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится [ряд (4) §2 при p=2], то в силу признака сравнения а) осталось вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n^3+4n^2-3} : \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+1)}{n^3+4n^2-3} = 2 > 0.$$

В силу пункта а) доказанной теоремы получим сходимость исходного ряда.

Пример 4. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2+5n+4}$ расходится.

Решение. Действительно, сравним с гармоническим рядом $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{n^2+5n+4} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(3n+1)}{n^2+5n+4} = 3 > 0$. В силу пункта б) доказанной теоремы получаем расходимость исходного ряда.

Применение признаков сравнения иногда бывает затруднительно ввиду необходимости составлять вспомогательный ряд с известным поведением. Не существует универсальных рядов, с помощью которых можно судить о сходимости и расходимости конкретного ряда.

Поэтому мы рассмотрим ряд достаточных условий, позволяющих исследовать поведение ряда в зависимости от скорости стремления общего члена к нулю.

Теорема 3 (признак Даламбера). Пусть для знакоположительного ряда (2) существует предел отношения последующего члена к предыдущему

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \quad \text{(возможно и бесконечность), тогда:}$$

а) если $d < 1$, то данный ряд сходится;

б) если $d > 1$, то ряд (2) расходится;

в) если $d = 1$, то данный признак не дает ответа: ряд (2) может как сходиться, так и расходиться, требуется дополнительное исследование.

Доказательство.

а) Пусть $d < 1$. Покажем, что ряд сходится. Действительно, так как $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$, то в силу определения предела последовательности для

любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать натуральное число N (зависящее от ε) так, что выполняется

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - d\right| < \varepsilon \ (n \geq N).$$

Отсюда

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - d < \varepsilon \text{ или } d - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < d + \varepsilon \ (n \geq N).$$

Положим $d + \varepsilon = q$, получим $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Так как $d < 1$, а ε – произвольно мало, то его можно подобрать столь малым, что $q = d + \varepsilon < 1$. Значит, выполняется $\frac{a_{N+1}}{a_N} < q, \frac{a_{N+2}}{a_N + 1} < q, \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < q, \ldots$, т.е.

$$a_{N+1} < a_N q,\ a_{N+2} < a_{N+1} q < a_N q^2,\ a_{N+3} < a_{N+2} q < a_N q^3,\ \ldots$$

Рассмотрим два ряда:

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots \qquad (5)$$

и

$$a_N + a_N q + a_N q^2 + a_N q^3 + \ldots \qquad (6)$$

Ряд (6) является геометрическим со знаменателем $q < 1$, поэтому он сходится. Но так как сходится мажорантный ряд, то сходится и ряд (5) в силу признака сравнения а). Но ряд (5) получен из данного ряда (2) отбрасыванием конечного числа членов $a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}$, следовательно, в силу свойства 3 сходящихся рядов (см. §1) ряд (2) сходится.

б) Пусть теперь $d > 1$. Покажем, что ряд расходится. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d > 1$, то $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ при достаточно больших $n \geq N$, поэтому $a_{n+1} > a_n$ $(n \geq N)$, члены ряда возрастают и необходимое условие сходимости ряда не выполняется. Следовательно, в силу следствия из необходимого условия данный ряд (2) расходится.

в) Проиллюстрируем на примерах, что в случае в) ряд (2) может как сходиться, так и расходиться.

Действительно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, для него

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1;$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (это обобщенный гармонический ряд при p = 2), но для него

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1.$$

Пример 5. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$ расходится.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{3^n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n^2}{3^n(n+1)^2}=3.$$

Осталось применить признак Даламбера, так как d = 3>1.

Пример 6. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$ сходится.

Решение. Напомним, что n! (n – факториал) определяется как произведение всех натуральных чисел от 1 до n : n! = 1·2... n и справедливо (n+1)! = (n+1)n!. Поэтому

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(2n+3)}{(n+1)!(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{2n+3}{2n+1}=0.$$

Отсюда вытекает сходимость данного ряда.

Замечания.

1. Признак Даламбера обычно применяют, когда общий член ряда содержит показательную функцию или факториал.

2. Отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}=D_n$ называют вариантой Даламбера.

Теорема 4 (радикальный признак Коши). Пусть для знакоположительного ряда (2) существует предел $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ (может быть и бесконечность), тогда:

а) если $\rho < 1$, то ряд (2) сходится;

б) если $\rho > 1$, то ряд (2) расходится;

в) если $\rho = 1$,то ничего определенного сказать нельзя – ряд может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. Пусть $\rho < 1$. Выберем число σ так, что $\rho < \sigma < 1$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho < \sigma$, то существует натуральное число N такое, что для $n \geq N$ имеем $\sqrt[n]{a_n} \leq \sigma < 1$, или эквивалентно $a_n \leq \sigma^n$. Поскольку геометрический ряд $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \sigma^n$ сходится ($\sigma<1$), то по признаку сравнения получаем сходимость ряда $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$, и первая часть утверждения доказана. Случай б) аналогичен признаку Даламбера в). Примеры, приведенные в признаке Даламбера в), применимы и в данном случае, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Пример 7. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ сходится.

Решение. Вычислим $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1}$. Так как $\rho = \frac{1}{3} < 1$, то исходный ряд сходится по доказанной теореме.

Пример 8. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{1000}\right)^n$ расходится.

Решение. Действительно, в этом случае

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\ln n}{1000}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{1000} = \infty.$$

Замечание. Радикальный признак Коши "сильнее" признака Даламбера: если применим признак Даламбера, то поведение ряда исследуется и с помощью радикального признака Коши. С другой стороны, существуют ряды, о сходимости или расходимости которых можно судить по признаку Коши, но признак Даламбера приводит к случаю в).

Приведем следующий эффективный признак, опирающийся на понятие несобственного интеграла.

Теорема 5 (интегральный признак Коши-Маклорена). Пусть члены знакоположительного ряда (2) являются значениями при x = 1, 2, ..., n, ... некоторой положительной, непрерывной и убывающей на промежутке [1, ∞) функции f(x):

$$a_1 = f(1), a_2 = f(2), \ldots, a_n = f(n), \ldots$$

Тогда

а) если сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, то сходится и ряд (2);

б) если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то ряд (2) также расходится.

Замечание. Функция f(x) называется *порождающей* для ряда (2).

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции y = f(x) с основанием от x = 1 до x = n.

Впишем в эту трапецию и опишем около нее две ступенчатые фигуры, состоящие из вписанных и описанных прямоугольников, основаниями которых служат промежутки [1, 2], [2, 3], [3, 4], ...

Высотами прямоугольников вписанной фигуры служат функции f(2), f(3), ..., f(n), а высотами прямоугольников описанной фигуры – значения f(1), f(2), ..., f(n–1) (рис. 1).

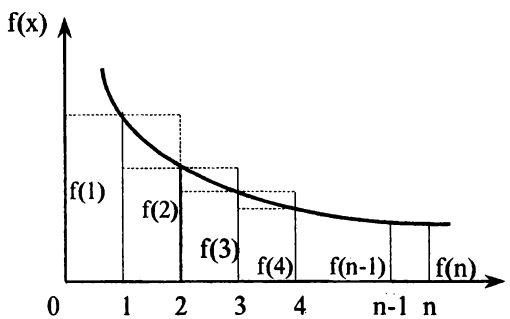


Рис. 1

Как видно из рисунка, площадь криволинейной трапеции, выражаемая интегралом $\int_1^n f(x)dx$, заключается между площадями вписанной и описанной ступенчатых фигур. Поэтому

$$f(2)\cdot 1+f(3)\cdot 1+\ldots+f(n)\cdot 1<\int_1^n f(x)dx<f(1)\cdot 1+f(2)\cdot 1+\ldots+f(n-1)\cdot 1$$

или

$$a_2+a_3+\ldots+a_n<\int_1^n f(x)dx<a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}.$$

Отсюда

$$S_n-a_1<\int_1^n f(x)dx<S_n-a_n.$$

Следовательно,

$$S_n<a_1+\int_1^n f(x)dx \qquad (7)$$

и

$$S_n>a_n+\int_1^n f(x)dx. \qquad (8)$$

а) Докажем первую часть теоремы. Пусть несобственный интеграл $\int_1^n f(x)dx$ сходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx=A$. Так как $f(x)>0$, $\int_1^n f(x)dx<\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx=A$. Из неравенства (7) следует $S_n<a_1+A$. Итак, последовательность частичных сумм ряда ограничена, в силу леммы 2 из §3 ряд (2) сходится.

б) Пусть несобственный интеграл $\int_1^n f(x)dx$ расходится. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx=\infty$.

Поэтому из неравенства (8) следует, что последовательность частичных сумм ряда (2) неограничена, следовательно, исходный ряд (2) расходится.

Следствие. Обобщенный гармонический ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}<\infty \Leftrightarrow p>1$$

Доказательство. Так как при $p \le 0$ не выполняется необходимое условие, то мы рассмотрим случай $p > 0$. При этом порождающая функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ $(1 \le x < \infty)$ является положительной, монотонно убывающей функцией.

Исследуем сходимость несобственного интеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ при различных значениях p.

При $p = 1$ находим

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{x}=\lim_{A\to\infty}\ln|x|\Big|_1^{A}=\lim_{A\to\infty}\ln A=\infty.$$

Имеем при $p \ne 1$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{1-p}\Big|_1^{A}=\frac{1}{1-p}\lim_{A\to\infty}(A^{-p+1}-1).$$

Так как $\lim_{A\to+\infty}A^{-p+1}$ равен нулю при $p>1$ и равен бесконечности при $p < 1$, то интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ существует тогда и только тогда, когда $p>1$, и осталось применить интегральный признак.

Замечание. Доказанный признак не дает возможность вычислять сумму сходящегося обобщенного гармонического ряда. В середине XVIII столетия Л.Эйлер доказал, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \qquad (9)$$

Пример 9. Показать, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится.

Решение. В этом случае полагаем $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ для $x \geq 2$. Тогда

(x) непрерывна, убывает на [2, ∞) и $f(n)=\frac{1}{n\ln n}$ для $n \geq 2$.

Далее, отметим, что

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{A\to\infty}\ln|\ln x|\Big|_2^A=\lim_{A\to\infty}(\ln|\ln A|-\ln|\ln 2|)=\infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int_2^{\infty}f(x)dx$ расходится. Следовательно, по интегральному признаку данный ряд также расходится.

§4. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

До сих пор мы рассматривали ряды с положительными членами. Рассмотрим теперь **знакочередующиеся ряды**, члены которых поочередно имеют то положительные, то отрицательные знаки. Такие ряды удобно записывать в виде

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \qquad (1)$$

где $a_n > 0$, n=1, 2, ... (конечно, можно начинать и с отрицательного члена).

Докажем следующее утверждение, дающее достаточное условие сходимости таких рядов.

Теорема Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда (1) монотонно убывают по абсолютной величине

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots \qquad (2)$$

и стремятся к нулю

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad (3)$$

то ряд (1) сходится и сумма его не превосходит первого члена.

Доказательство. Рассмотрим четную частичную сумму S_{2m} ряда (1)

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2m-1} - a_{2m}.$$

Запишем ее в виде

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Так как ввиду (2) каждая скобка положительна, то последовательность S_{2m} монотонно возрастает. С другой стороны, переписав ее в виде

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m},$$

видим, что S_{2m} ограничена сверху

$$S_{2m} < a_1 \ (m = 1, 2, \ldots).$$

В силу утверждения о пределе монотонной последовательности (лемма 1 §3) частичная сумма S_{2m} имеет конечный предел

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S, 0 < S \le a_1. \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь частичные суммы нечетного порядка

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}.$$

В силу (3) и (4)

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S.$$

Итак, частичные суммы как четного, так и нечетного числа членов имеют общий предел S.

Отсюда следует, что число S будет суммой ряда (1). Вторая часть утверждения следует из неравенства (4).

Следствие (оценка остатка знакочередующегося ряда). Остаток знакочередующегося ряда (2) по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отброшенных членов.

Действительно, остаток ряда (1)

$$r_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots)$$

является знакочередующимся рядом и, следовательно, его сумма в силу теоремы по абсолютной величине меньше первого члена a_{n+1}: $|r_n| \le a_{n+1}$.

Простейшими примерами знакочередующихся рядов, известными еще Лейбницу, являются следующие ряды.

Пример 1.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}. \qquad (5)$$

Пример 2.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}. \qquad (6)$$

Сходимость этих рядов вытекает из доказанной теоремы. Ниже (см. гл.2 §2 и 4) будет показано, что сумма первого ряда равна ln2, а ряд (6) сходится к $\frac{\pi}{4}$.

Пример 3. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^3}$ с ошибкой меньше 0,001.

Решение. Найдем значение n, для которого $a_{n+1} \le 0{,}001$, тогда в силу следствия частичные суммы S_n будут приближать сумму ряда S с точностью $|S - S_n| = |r_n| < 0{,}001$. Так как $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3}$, то надо найти n такое, что $\frac{1}{(n+1)^3} < 0{,}001$. Беря n=10, находим, что $\frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{11^3} < 0{,}001$. Тогда требуемое приближение равно

$$\sum_{n=1}^{10}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^3} \approx \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{10^3} \approx 0{,}901.$$

Замечание. Если в случае знакоположительных рядов сходимость ряда вытекала из ограниченности частичных сумм, то сходимость

знакочередующихся рядов следует из наложения положительных и отрицательных членов.

§5. Сходимость произвольных рядов

Изучим вопрос о сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (1)$$

члены которых могут иметь произвольные знаки.

Рассмотренные выше знакочередующиеся ряды являются частным случаем таких рядов.

Докажем следующий признак сходимости рядов (1), сводящий исследование сходимости ряда (1) к изучению ряда с положительными членами.

Теорема (достаточный признак сходимости числового ряда). Пусть дан ряд (1) с членами произвольных знаков. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \qquad (2)$$

составленный из абсолютных величин его членов, то сходится и данный ряд (1).

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n суммы первых n членов рядов (1) и (2). Пусть S_n' – сумма всех положительных, а S_n'' – сумма абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов ряда (1), тогда

$$S_n = S_n' - S_n'', \quad \sigma_n = S_n' + S_n''.$$

По условию, последовательность σ_n имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. Поэтому S_n' и S_n'' – положительные возрастающие последовательности, ограниченные числом σ. Следовательно, они имеют пределы S′ и S″. Значит, из соотношения $S_n = S_n' - S_n''$ вытекает, что и последовательность S_n имеет предел, равный S′ – S″, что и требовалось доказать.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2} = \frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \ldots, \qquad (3)$$

где α – любое число.

Решение. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}=\frac{|\sin\alpha|}{1^2}+\frac{|\sin 2\alpha|}{2^2}+\frac{|\sin 3\alpha|}{3^2}+\ldots \qquad (4)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots \qquad (5)$$

Члены ряда (4) не больше соответствующих членов ряда (5). Но ряд (5) сходится. Значит, ряд (4) также сходится, и в силу доказанной теоремы ряд (3) сходится.

Доказанный признак сходимости произвольного ряда является лишь достаточным, но не необходимым: существуют ряды, которые сами сходятся, но ряды, составленные из абсолютных величин членов ряда, расходятся.

Пример 2. Знакочередующийся ряд (5) из §4 сходится, а ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ (гармонический ряд) – расходится.

Пример 3. Знакочередующийся ряд (6) из §4 сходится, а ряд из абсолютных величин расходится. Действительно, это непосредственно вытекает из неравенства $\frac{1}{2k-1}>\frac{1}{2k}$, теоремы сравнения и расходимости гармонического ряда.

Если ряд (1) сходится вместе с рядом, составленным из абсолютных величин его членов, то говорят, что ряд (1) сходится абсолютно (**абсолютно сходящийся ряд**).

Из доказанной теоремы вытекает, что одной сходимости ряда (2) уже достаточно для абсолютной сходимости ряда (1).

Если ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда, расходится, то данный ряд (1) называется **условно сходящимся (неабсолютно сходящимся)**.

Возвращаясь к рассмотренным выше примерам, можно сказать, что ряд (3) является абсолютно сходящимся, а ряды (5) и (6) из §4 будут условно сходящимися.

С абсолютно сходящимися рядами можно оперировать как с конечными суммами. Например, имеет место следующее свойство.

Сумма абсолютного сходящегося ряда не меняется при любой перестановке его членов.

Это **переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов**. Оно не сохраняется для условно сходящихся рядов.

Пример 4. Обозначим через S сумму условно сходящегося ряда

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Как показано в §1, перестановкой членов этого ряда можно добиться изменения его суммы. Имеет место следующая теорема (доказательство см. в книге [3], т. II, с. 317).

Теорема Б. Римана. Если ряд (1) условно сходится, то какое бы ни взять наперед число A (конечное или равное $+\infty$), можно так переставить члены в этом ряду, чтобы преобразованный ряд имел своей суммой именно A.

Замечание. Обращение с рядами требует известной осторожности. Приведем следующий пример.

Пример 5. Найти ошибку в рассуждениях.

Обозначим $a = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$

Тогда $2a = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = (1 + 2 + 4 + 8 + \ldots) - 1 = a - 1$.

Поэтому $a = -1$, что абсурдно.

ГЛАВА 2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯДЫ ТЕЙЛОРА

§1. Функциональные ряды

Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (1)$$

называется **функциональным**, если члены его являются функциями от переменной x. Давая переменной x определенные числовые значения, получаем сходящиеся или расходящиеся числовые ряды.

Если в точке x_0 ряд $u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости ряда* (1). Если этот ряд расходится, то x_0 – *точка расходимости ряда* (1).

Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд (1) сходится, называется **областью сходимости** этого ряда.

Областью сходимости функциональных рядов часто бывает какой-нибудь промежуток числовой оси.

Пример 1. Ряд

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (2)$$

сходится в интервале (−1, 1), так как при любом $|x| < 1$ соответствующий числовой ряд есть геометрический ряд со знаменателем q = x. При $|x| \geq 1$ этот ряд расходится. Следовательно, область сходимости ряда (2) есть интервал (−1, 1).

Сумма функционального ряда является некоторой функцией от x, определенной в области сходимости. Обозначим ее через S(x).

Так, в приведенном примере сумма ряда равна

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1). \qquad (3)$$

Обозначим через $S_n(x)$ – n-ю частичную сумму ряда (1), а через $r_n(x)$ остаток ряда.

Если ряд сходится при некотором значении x, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

(см. гл. I, §1).

Как известно (см. работу [10]), сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Кроме того, производная и интеграл от суммы конечного числа функций равны соответственно сумме производных и интегралов от этих функций. Возникает вопрос: переносятся ли данные свойства на суммы бесконечного числа функций, т.е. на функциональные ряды?

Покажем на примере, что для произвольных функциональных рядов эти свойства могут оказаться несправедливыми.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots.$$

При x = 0 все члены ряда равны нулю и сумма его равна нулю. При $x \neq 0$ ряд представляет собой сходящуюся геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^2} < 1$. Сумма ряда равна (см. гл. I, §1)

$$\frac{x^2}{1+x^2} : (1 - \frac{1}{1+x^2}) = 1.$$

Таким образом, сумма ряда, состоящего из непрерывных функций, оказалась разрывной функцией. Она имеет разрыв в точке x = 0 : S(x) = 1 ($x \neq 0$) и S(0) = 0.

Сейчас мы выделим класс функциональных рядов, для которых справедливы утверждения о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости.

Функциональный ряд (1) называется *равномерно сходящимся* в области D, если для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать такое число N, зависящее от ε и не зависящее от x, что при всех номерах $n \geq N$ неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$ справедливо для всех точек D.

Поясним вкратце смысл данного определения. Пусть в точке x_1 ряд сходится. Тогда для остатка ряда выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x_1) = 0.$

Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число N_1, что при всех $n \geq N_1$ справедливо неравенство $|r_n(x_1)| < \varepsilon$. Возьмем в области сходимости другую точку x_2, в ней ряд тоже сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x_2) = 0$.

Если взять то же самое число $\varepsilon > 0$, то неравенство $|r_n(x_2)| < \varepsilon$ будет выполняться, начиная с некоторого другого номера N_2, например, большего, чем N_1. Если бы речь шла только о двух точках, то можно было бы взять наибольшее из двух номеров N_1, N_2, и тогда оба остатка были бы по абсолютной величине меньше ε при всех $n \geq \max(N_1, N_2)$. Так же мы могли бы поступить, если бы у нас было конечное число точек. Но если область сходимости есть интервал, то в нем бесконечное число точек, и хотя каждой точке соответствует свое число N (ε, x) [его обозначают N (ε, x), подчеркивая зависимость от ε и от x] такое, что при $n \geq N$ (ε, x) остаток $|r_n(x)| < \varepsilon$, но числа N, общего для всех точек области сходимости, может и не найтись.

Рассмотрим геометрический смысл введенного понятия. Если S(x) – сумма равномерно сходящегося ряда (1), а $S_n(x)$ – его частичные суммы, то по определению для заданного $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что для всех x и $n \geq N$ выполняется условие

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon,$$

т.е. частичные суммы $S_n(x)$ ($n \geq N$) все лежат в полосе: $S(x)-\varepsilon < S_n(x) < S(x)+\varepsilon$ (рис. 2).

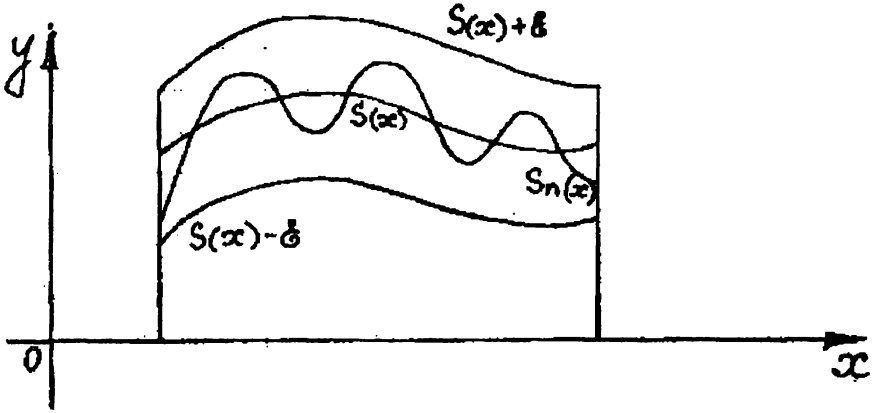


Рис. 2

Приведем простой, но эффективный признак равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема 1 (признак Вейерштрасса). Если члены функционального ряда (1) удовлетворяют в области D неравенствам

$$|u_n(x)| \le a_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

где a_n – члены некоторого сходящегося знакоположительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \tag{5}$$

то ряд (1) сходится равномерно в D.

Доказательство. По определению сходимости числового ряда (5) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n \ge N$ справедливо неравенство $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$. Тогда для остатка функционального ряда (1) получаем оценку $|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$.

При $n \ge N$, где $N = N(\varepsilon)$ зависит лишь от $\varepsilon > 0$, отсюда по определению и следует равномерная сходимость ряда (1).

Пример 3. Тригонометрические ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \tag{6}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} \tag{7}$$

сходятся равномерно в любом интервале числовой оси, так как $|\cos nx| \le 1$, $|\sin nx| \le 1$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится.

Замечание. Ряды, для которых выполняются условия теоремы Вейерштрасса, называются правильно сходящимися.

Доказательства следующих утверждений см. в книгах [3], т. II, гл. XII; [13], т. I, п. 36.

Теорема 2. Если члены равномерно сходящегося в D функционального ряда (1) непрерывны, то:

– сумма ряда (1) также непрерывна на D;

– ряд (1) можно интегрировать почленно.

Последнее утверждение состоит в том, что если a и b – любые две точки из D, то $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$.

Теорема 3. Пусть функциональный ряд (1) сходится в D и его члены имеют непрерывные производные $u_n'(x)$. Тогда, если ряд, полученный после почленного дифференцирования, является равномерно сходящимся на D, то его сумма равна производной от суммы данного ряда $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Пример 4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3} \tag{8}$$

и ряд, составленный из производных $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, правильно сходятся в любом интервале числовой оси, так как они мажорируются соответственно сходящимися числовыми рядами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (обобщенные

гармонические ряды при p=3 и p=2). Следовательно, сумма ряда (8) непрерывна на всей числовой оси, и этот ряд можно дифференцировать и интегрировать при всех x.

В настоящем курсе будут рассмотрены только важнейшие классы функциональных рядов: степенные и тригонометрические.

§2. Степенные ряды

Ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

называется **степенным рядом**.

Это функциональный ряд по степеням 1, x, x^2, ..., x^n, ..., поэтому ряд начинается с члена a_0, который называется *свободным членом*. Для удобства n-м членом степенного ряда называют член a_nx^n несмотря на то, что он стоит на (n + 1)-м месте. Свободный член ряда a_0 считается нулевым членом степенного ряда.

Нас будет интересовать нахождение области сходимости степенного ряда.

Отметим, прежде всего, что степенной ряд (1) сходится в точке 0.

Докажем важную **теорему Абеля**, на которой основано изучение области сходимости рядов (1).

Теорема 1.

а) Если степенной ряд (1) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$, т.е. при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

б) Если степенной ряд (1) расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всяком x, большем по абсолютной величине, чем $|x_1|$, т.е. при $|x| > |x_1|$.

Доказательство. Отметим, что в силу сходимости числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ его общий член стремится к нулю (необходимое условие) $a_n x_0^n \to 0$; поэтому все члены этого ряда ограничены, т.е. существует такое постоянное положительное число M, что при всяком n имеет место оценка

$$\left|a_n x_0^n\right| \leq M (n = 0,1,2,\ldots).$$

Запишем ряд (1) в виде

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots$$

и составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n .$$

В силу установленного выше неравенства данный ряд мажорируется геометрическим рядом $M\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ со знаменателем $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$.

Если $|x| < |x_0|$, то $q < 1$, и геометрический ряд сходится, что и доказывает первую часть утверждения теоремы (воспользоваться признаком сравнения).

Второе утверждение непосредственно вытекает из первой части. Действительно, если бы ряд (1) сходился при $|x| > |x_1|$, то в силу доказанной части а) он абсолютно сходился бы и при всех меньших по абсолютной величине значениях x, в частности, при $x = x_1$, что противоречит условию. Теорема Абеля полностью доказана.

Теорема Абеля показывает, что все точки сходимости степенного ряда (1) расположены ближе к началу координат, чем точки расходимости.

Кроме того, при исследовании сходимости степенных рядов можно воспользоваться одним из признаков сходимости знакоположительных числовых рядов (например, признаком Даламбера), так как выясняется абсолютная сходимость ряда.

Для степенного ряда (1) имеют место следующие утверждения:

а) область сходимости ряда (1) состоит только из одной точки x=0, т.е. ряд расходится для всех значений $x \neq 0$;

б) область сходимости ряда (1) состоит из всех точек оси Ox, т.е. ряд сходится при всех x;

в) область сходимости состоит больше, чем из одной точки, причем на числовой оси имеются как точки сходимости, так и точки расходимости. В этом случае существует такое положительное число R, что для всех x, по модулю меньших R($|x|<R$), ряд абсолютно сходится, а для всех x, по модулю больших R, ряд расходится.

Проиллюстрируем эти утверждения на примерах.

Пример 1. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + \ldots$ (напомним, что 0! = 1).

Если $x \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$

По признаку Даламбера данный ряд расходится при всех $x \neq 0$.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots.$$

Если $x \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$

По признаку Даламбера данный ряд сходится при всех x.

В силу необходимого условия сходимости ряда отсюда вытекает следующее соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0 \quad (-\infty < x < \infty). \qquad (2)$$

Пример 3. Рассмотренный в §1 ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ сходится к $\frac{1}{1-x}$ при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$.

Назовем число R, фигурирующее в пункте в), **радиусом сходимости степенного ряда** (1). В примере 3 R = 1. Если ряд (1) сходится лишь в точке 0, то положим R = 0. В случае б) будем считать $R=\infty$.

Совокупность всех x, при которых степенной ряд (1) сходится, назовем **интервалом сходимости ряда**.

Областью сходимости степенного ряда (1) является интервал (–R,R), к которому в зависимости от конкретных случаев могут быть добавлены концевые точки R, –R.

Пример 4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\ldots+\frac{1}{n+1}x^n+\ldots. \qquad (3)$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $1+\frac{1}{2}|x|+\frac{1}{3}x^2+\ldots+\frac{1}{n+1}|x|^n+\ldots$.

С помощью признака Даламбера получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{n+1}}{n+2}:\frac{|x|^n}{n+1}\right)=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=|x|<1.$$

Таким образом, ряд (3) абсолютно сходится при $|x|<1$, т.е. в интервале (–1,1), расходится при $|x|>1$. Радиус сходимости ряда R=1. Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках x=1 и x=–1.

Подставляя в ряд (3) значение x=1, получаем расходящийся гармонический ряд.

В точке x=–1 получим знакочередующийся ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+1}(-1)^n+\ldots,$$

который сходится на основании признака Лейбница.

Таким образом, областью сходимости ряда (3) является промежуток [–1, 1).

Укажем способ определения радиуса сходимости степенного ряда. Пусть задан ряд (1) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ и рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|a_0|+|a_1||x|+|a_2|x|^2+\ldots+|a_n||x|^n+\ldots$

Для определения интервала сходимости данного знакоположительного ряда применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=d|x|,\ d=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

По признаку Даламбера ряд (1) сходится абсолютно при $|x| < \frac{1}{d}$ и расходится при $|x| > \frac{1}{d}$ (так как расходимость ряда в данном случае есть нарушение необходимого условия).

Итак, интервал $\left(-\frac{1}{d}, \frac{1}{d}\right)$ есть интервал сходимости степенного ряда (1), т.е.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Замечание. При нахождении интервала сходимости редко пользуются последней формулой, а обычно непосредственно применяют признак Даламбера. Если ряд (1) содержит бесчисленное множество коэффициентов, равных нулю, то отношение $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ не имеет предела, и формулу для радиуса сходимости применять нельзя.

Выясним свойства степенных рядов.

Чтобы применить к степенным рядам результаты §1, докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть степенной ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет интервал сходимости $(-R,R)$, тогда он равномерно сходится внутри интервала сходимости, т.е. ряд равномерно сходится на любом промежутке $[-r,r]$, где $0 < r < R$.

Доказательство. Пусть $x = r$. Так как степенной ряд сходится абсолютно в любой точке интервала сходимости, то сходится ряд

$$|a_0| + |a_1|r + |a_2|r^2 + \ldots + |a_n|r^n + \ldots . \qquad (4)$$

Если $|x| \le r$, то $|a_nx^n| \le |a_n|r^n$. Поэтому ряд $|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \ldots + |a_nx^n| + \ldots$ мажорируется сходящимся числовым рядом (4). Это означает, согласно теореме 1 §1, что данный степенной ряд (1) равномерно сходится на промежутке $[-r,r]$. Теорема доказана.

Теорема 3 (о непрерывности суммы степенного ряда). Сумма степенного ряда (1) является непрерывной функцией в каждой точке его интервала сходимости.

Доказательство. Пусть $x_0 \in (-R,R)$. Тогда существует число $0 < r < R$ такое, что $x_0 \in [-r,r]$. По теореме 2 ряд (1) равномерно сходится в $[-r,r]$. Поэтому на основании теоремы 2 §1 его сумма непрерывна в любой точке из $[-r, r]$, в частности, в точке x_0.

Теорема доказана.

Замечание. Если степенной ряд (1) имеет интервал сходимости $(-R,R)$ и сходится на границе (например, при $x = R$), то сумма ряда непрерывна в точке сходимости (в точке $x = R$).

Теорема 4 (о дифференцировании степенного ряда). Степенной ряд (1) можно дифференцировать почленно в любой точке его интервала сходимости. При этом полученный ряд

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots \qquad (5)$$

имеет тот же интервал сходимости, что и исходный ряд.

Доказательство. Применяя признак Даламбера к рядам, составленным из абсолютных величин рядов (1) и (5), и предполагая при этом, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ существует, легко убедиться, что ряды (1) и (5) имеют одинаковый интервал сходимости.

Пусть x_0 – произвольная точка интервала сходимости. Рассмотрим промежуток $[-r,r]$ $(r<R)$, лежащий внутри интервала сходимости и содержащий точку x_0 $(|x_0| < r)$. По теореме 2 продифференцированный степенной ряд (5) – равномерно сходящийся в промежутке $[-r, r]$.

Следовательно, на основании теоремы 2 предыдущего параграфа его сумма равна производной от суммы данного ряда.

Следствие. Если степенной ряд (1) сходится в интервале $(-R, R)$, то его сумма представляет собой функцию, имеющую в интервале сходимости производные любого порядка, каждая из которых есть сумма ряда, получающегося в результате почленного дифференцирования данного ряда соответствующее число раз.

Говорят, что сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема в интервале сходимости.

Аналогичными рассуждениями можно доказать следующее утверждение.

Теорема 5 (об интегрировании степенного ряда). Степенной ряд (1) можно почленно интегрировать в интервале сходимости, т.е. если x_1 и x_2 – точки, принадлежащие интервалу сходимости, то

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{x_1}^{x_2}x^n dx.$$

При этом полученный ряд имеет тот же интервал сходимости (–R, R).

Следствие. Для любого $x \in (-R, R)$ имеет место формула

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)dx=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\ldots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots(-R<x<R). \quad (6)$$

Теоремы 4 и 5 являются важным инструментом, используемым для разложения многих функций в степенные ряды.

Пример 5. Показать, что логарифмический ряд

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots(-1<x\le 1). \quad (7)$$

Решение. Воспользуемся соотношением (3) §1

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x}\ (-1<x<1).$$

Заменим в этом отношении $x = -t$, получим

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^n t^n+\ldots\ (-1<t<1).$$

Используя (6), находим

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\int_0^x(1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^n t^n+\ldots)dt$$

для $|t|<1$, откуда и следует формула (7).

Отметим, что в силу сходимости полученного ряда в точке $x_0 = 1$ и замечания к теореме 3 его сумма непрерывна в точке $x_0 = 1$ и потому

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots.$$

Мы рассмотрели степенные ряды вида (1), расположенные по степеням x.

Если исключить всюду расходящиеся (кроме точки 0) ряды, то для каждого такого ряда существует промежуток сходимости с центром в точке x=0 от –R до R, где R – радиус сходимости. Концы этого промежутка включаются или нет, смотря по случаю.

Рассматривают и степенные ряды более общего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

расположенные по степеням двучлена $x-x_0$ (вместо x). Такой ряд не отличается существенно от ряда вида (1), ибо приводится к нему простой заменой $x-x_0=y$ с точностью до обозначения переменной.

Для этого ряда, если он не будет всюду расходящимся (кроме точки x_0), также существует промежуток сходимости, но на этот раз с центром в точке x_0: от $x_0 - R$ до $x_0 + R$.

Концы его, как и в случае ряда (1), могут принадлежать, но могут и не принадлежать области сходимости.

Все свойства, указанные в теоремах 1–4, сохраняются (с соответствующими изменениями). В частности, такие степенные ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз в интервале сходимости, причем полученные ряды имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд.

Пример 6. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n} = 1 + \frac{1}{3}(x-2) + \frac{1}{9}(x-2)^2 + \ldots + \frac{1}{3^n}(x-2)^n + \ldots$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-2|^n}{3^n}$, и применим к нему признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x-2|^{n+1}}{3^{n+1}} : \frac{|x-2|^n}{3^n}\right) = |x-2| \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}|x-2|.$$

Имеем $\frac{1}{3}|x-2| < 1$.

И, следовательно, интервал сходимости есть (–1, 5), а радиус сходимости R=3. Исследуем данный ряд на концах интервала сходи-

мости. В точке $x_0 = 1$ получаем расходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$.

Аналогично в точке $x_0 = 5$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ расходится.

§3. Ряды Тейлора

Перейдем теперь к рассмотрению следующей задачи.

Пусть задана функция f(x). Когда можно утверждать, что она является суммой некоторого степенного ряда? Из свойств степенных рядов следует прежде всего то, что эта функция должна быть бесконечно дифференцируема.

Оказывается, что это условие не является достаточным.

В дальнейшем, если заданную функцию f(x) можно представить в виде суммы степенного ряда, то будем говорить, что функция f(x) разложена в степенной ряд, а f(x) – порождающая функция.

Важность такого разложения видна хотя бы из того, что мы получаем возможность приближенно заменить функцию суммой нескольких первых членов степенного ряда, т.е. многочленом. При этом вычисление значения функции сводится к вычислению значений многочлена, что можно сделать, производя только простейшие арифметические операции. Кроме того, мы сможем оценить точность получаемых приближенных значений. Замена функции таким простым выражением, как многочлен, оказывается удобной в ряде задач математического анализа. Например, при вычислении определенных интегралов.

Пусть функция f(x) является суммой степенного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \qquad (1)$$

интервал сходимости которого $(x_0 - R_1, x_0 + R)$.

Вычислим коэффициенты этого ряда. В интервале сходимости степенной ряд можно дифференцировать почленно любое число раз, причем полученные при этом ряды имеют тот же интервал сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ (следствие из теоремы 4 предыдущего параграфа).

Последовательно дифференцируя ряд (1), получим следующие тождества, справедливые при всех x их интервала сходимости:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots$$

$f''(x) = 2a_2 + 2\cdot3a_3(x-x_0) + 3\cdot4a_4(x-x_0)^2 + \ldots + (n-1)na^n(x-x_0)^{n-2} + \ldots$

$f'''(x) = 2\cdot3a_3 + 2\cdot3\cdot4a_4(x-x_0) + \ldots + (n-2)(n-1)na^n(x-x_0)^{n-3} + \ldots$

.....

$f^{(n)}(x) = 2\cdot3\ldots(n-1)na_n + 2\cdot3\ldots n(n+1)a_{n+1}(x-x_0) + \ldots$

.....

Положим в полученных равенствах $x=x_0$, имеем:

$f(x_0)=a_0,\ f'(x_0)=a_1,\ f''(x_0)=2a_2,\ f'''(x_0)=2\cdot3a_3\ldots$

$f^{(n)}(x_0) = 2\cdot3\ldots(n-1)\,na_n\ldots$

Отсюда находим коэффициенты степенного ряда:

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!},\ldots,a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ldots.$$

Подставляя найденные выражения в равенство (1), получим ряд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots.$$

Итак, если функция f(x) разлагается в степенной ряд по степеням $x-x_0$, то этот ряд имеет следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \quad (2)$$

Полученный ряд называется **рядом Тейлора функции f(x)**, а его коэффициенты – *коэффициентами Тейлора* функции f(x) в точке x_0.

В частном случае, при $x_0=0$, ряд (2) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \ldots \quad (3)$$

и называется **рядом Маклорена функции f(x)**.

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 1. Если функция f(x) разлагается в степенной ряд по степени $x-x_0$, то этот ряд обязательно является ее рядом Тейлора (или Маклорена в случае $x_0 = 0$).

Следствие. Пусть R>0 и предположим, что $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ –

степенные ряды, сходящиеся при $-R<x<R$. Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ $(-R < x < R)$, то $a_n = b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Действительно, если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n (-R < x < R)$, то по теореме 1 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть функция f(x) бесконечно дифференцируема в точке x_0. Составим для нее ряд Тейлора

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots.$$

Будет ли построенный ряд сходиться к порождающей его функции f(x)?

Оказывается, это может не быть справедливым. В следующем примере ряд Тейлора сходится на всей числовой прямой, но не сходится к порождающей его функции.

Пример. Рассмотрим функцию (рис. 3)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{если } x \neq 0 \\ 0, \quad \text{если } x = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Можно показать, что эта функция бесконечно дифференцируема на всей числовой оси, причем все ее производные в точке x=0 равны нулю. Действительно, при $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

и

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}.$$

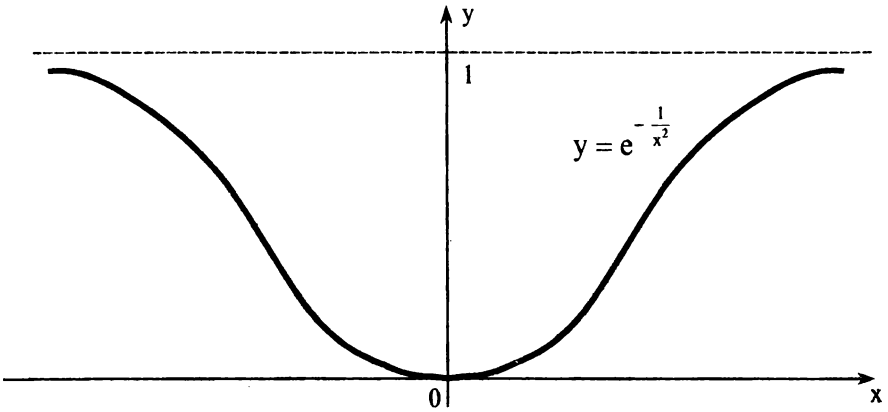


Рис. 3

Заменим $\frac{1}{x} = t$, тогда

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0.$$

Здесь использовано правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (см. [10]). Аналогично доказываются соотношения $f^{(n)}(0) = 0$ (n = 2, 3, ...).

Поэтому ряд Маклорена для этой функции имеет вид

$$0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots + 0 \cdot x^n + \ldots .$$

Этот ряд всюду сходится, его сумма не совпадает с порождающей функцией.

Обозначим через $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ частичную сумму ряда Тейлора $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Эта частичная сумма называется *многочленом Тейлора функции f(x)*. Назовем дополнительным (остаточным) членом ряда Тейлора разность

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x). \quad (5)$$

Сходимость ряда Тейлора к порождающей его функции f(x) в точке x означает, что $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ или $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в точке x функция f(x) являлась суммой составленного для нее ряда Тейлора (Маклорена), необходимо и достаточно, чтобы дополнительный член $R_n(x)$ стремился к нулю при n, стремящемуся к бесконечности.

Величина $R_n(x)$ дает ту ошибку, которую мы делаем, заменяя функцию f(x) многочленом $S_n(x)$.

Структура остаточного (дополнительного) члена ряда Тейлора содержится в следующем утверждении.

Лемма. Если функция f(x) во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0, имеет (n+1) производную $f^{(n+1)}(x)$, то остаточный (дополнительный) член $R_n(x)$ ряда Тейлора для любой точки этого интервала имеет вид:.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (6)$$

где точка ξ заключена между x и x_0.

Доказательство леммы см. в работе [10].

Выражение дополнительного члена по формуле (6) называется **остаточным (дополнительным) членом в форме Лагранжа**, а формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

– **формулой Тейлора**. Частный случай ее при $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(ξ между 0 и x) называется формулой Маклорена.

Вопрос о разложимости функции в ряд Тейлора решается следующим утверждением.

Теорема 3. Если в некотором интервале, содержащем точку x_0, абсолютные величины всех производных функции f(x) ограничены одним и тем же числом

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M \quad (M \text{ не зависит от } n \text{ и } x), \tag{7}$$

то функция f(x) в этом интервале разлагается в ряд Тейлора.

Доказательство. Нужно установить соотношение

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \tag{8}$$

для всех точек интервала. В силу соотношений (6) и (7) получаем оценку

$$\left|R_n(x)\right| \le M \cdot \frac{\left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Но [см. предельное равенство (2) из §2]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

откуда и вытекает утверждение теоремы 3.

§4. Разложение некоторых элементарных функций в ряды Маклорена

Во многих задачах теории и практики важнейшую роль играют разложения классических элементарных функций в ряды Маклорена.

1. **Разложение в ряд Маклорена функции e^x.**

Все производные функции e^x также равны e^x и в точке $x_0 = 0$ равны 1. Тогда ряд Маклорена этой функции имеет вид:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{1}$$

Как было показано в примере 2 §2, ряд (1) сходится на всей числовой оси. Для того чтобы установить, что ряд (1) имеет своей суммой e^x при всех x, покажем выполнение соотношения (8) §3. Рассмотрим промежуток [–N,N], где N>0 – любое фиксированное число. Функция e^x монотонно возрастает, поэтому для всех значений $x \in [-N,N]: e^x < e^N$. Значит, все производные в этом промежутке ограничены одним и тем же числом $M = e^N$. Из доказанной теоремы 3 §3 вытекает, что суммой ряда (1) является e^x. Но по предположению N – любое число. Следовательно, при всех x имеет место разложение

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < \infty).$$

2. **Разложение в ряд Маклорена функции sin x.**

Находим производные функции $f(x)=\sin x$: $f'(x)=\cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(IV)}(x)=\sin x$, $f^{(V)}(x)=\cos x$, $f^{(VI)}(x) = -\sin x$, ..., $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\pi/2)$. (см. [10]). При $x = 0$ имеем $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{(IV)}(0)=0$, $f^{(V)}(0)=1$, ..., $f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}$, $f^{(2n)}(0) = 0$, ...

Поэтому для функции sin x получаем следующий ряд Маклорена:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots. \qquad (3)$$

По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} : \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2n(2n+1)} = 0,$$

и, следовательно, ряд (3) сходится абсолютно на всей числовой оси. Покажем, что он сходится к порождающей его функции.

Это следует из теоремы 3 §3, так как при всех $x\in(-\infty, \infty)$ выполняются

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right| \le 1.$$

Итак, для функции sin x на всей числовой прямой справедливо разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \qquad (4)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (-\infty < x < \infty).$$

(см. рис. 4).

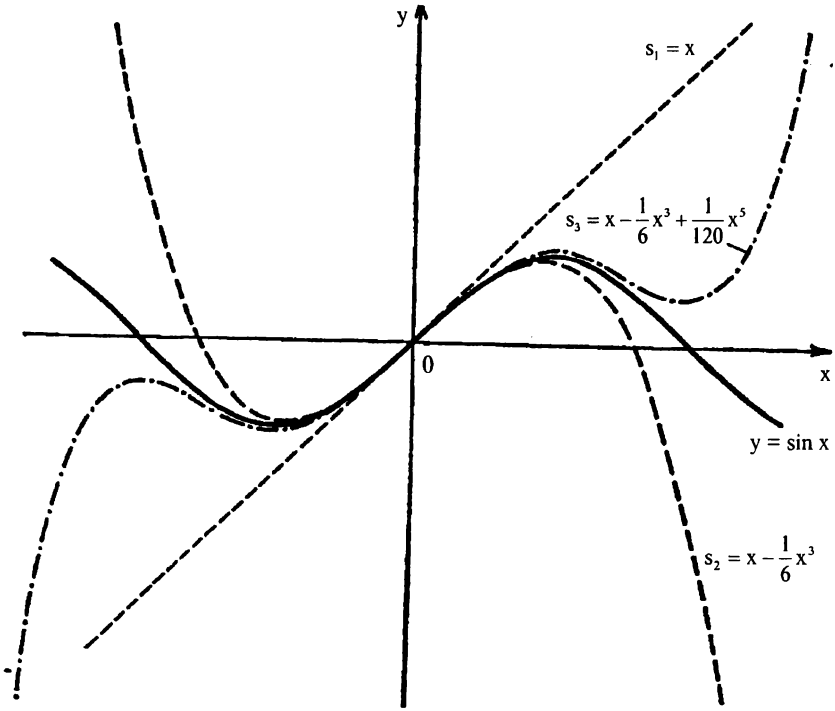


Рис. 4

3. Разложение в ряд Маклорена функции cos x

Оно может быть получено дифференцированием степенного ряда (4)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty). \qquad (5)$$

Отметим, что, как и для sin x, разложение (5) просто исследуется с помощью теоремы 3 §3.

Доказательство возможности разложения e^x, sin x, cos x в ряд Маклорена было простым, так как производные этих функций легко вычислялись. Кроме того, они были ограниченными на любом интервале оси Ox, поэтому полученные ряды представляют разлагаемые функции на всей числовой оси.

Обычно исследование остаточного члена ряда Тейлора (Маклорена) представляет затруднение, поэтому поступают следующим образом.

Сначала вычисляют производные в точке и составляют ряд Тейлора (Маклорена) данной функции. Для полученного степенного ряда находят интервал сходимости и затем исследуют остаточный член в интервале сходимости.

Другим способом получения новых разложений являются почленное интегрирование и дифференцирование известных разложений.

Продемонстрируем ниже эти способы.

§4. Биномиальный ряд

Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1+x)^m$, где m – любое действительное число, отличное от нуля.

Имеем $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$, $f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$,..., $f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}$, ...

При $x = 0$ находим $f(0) = 1$, $f'(0) = m$, $f''(0) = m(m-1)$, $f'''(0) = m(m-1)(m-2)$,..., $f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)... (m-n+1)$,... .

Подставим найденные значения коэффициентов в ряд Маклорена (3) §3:

$$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n+... .$$

Этот ряд называется **биномиальным**.

Найдем его интервал сходимости. Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}:\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n\right|=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right|=|x|.$$

Значит, ряд сходится при $|x|<1$: $-1<x<1$.

Можно показать, что для данного ряда $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ $(-1 < x < 1)$ (доказательство опускаем ввиду сложности). Итак, биномиальный ряд представляет функцию $(1+x)^m$ в интервале $(-1,1)$:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \quad (6)$$

$(-1 < x < 1)$.

При $|x| > 1$, если только m не является натуральным числом, ряд расходится.

Если m – натуральное число, то, начиная с n=m+1, все коэффициенты обращаются в нуль, и получаем формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + x^m (m = 1,2,\ldots).$$

Замечание. Поведение ряда (6) на концах интервала сходимости при различных m видно из следующей таблицы:

$x = 1$	$m \le -1$ $-1 < m < 0$ $m > 0$	Расходится Сходится условно Сходится абсолютно
$x = -1$	$m < 0$ $m > 0$	Расходится Сходится абсолютно

Приведем несколько часто встречающихся биномиальных рядов:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots \ (-1 \le x \le 1);$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^4 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^6 + \ldots \ (-1 \le x \le 1);$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots \ (-1 < x \le 1);$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)x^3 + \ldots \ (-1 \le x \le 1).$$

§5. Разложение в ряд Маклорена функций ln(1+x) и arctg x

Выше [см. формулу (7) §2] было получено разложение (**логарифмический ряд**)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \le 1).$$

Совершенно аналогично, применяя метод интегрирования, можно найти разложение в ряд Маклорена функции arctg x. С этой целью заменим в формуле для суммы членов геометрической прогрессии [формула (3) §1] x на $(-x^2)$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \quad (-1 < x < 1).$$

Интегрируя это разложение в пределах от 0 до x ($|x|<1$), получаем (учитывая $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$)

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots (-1 < x < 1). \quad (7)$$

(**ряд Маклорена для функции arctg x**).

На концах интервала сходимости данный ряд сходится, и поэтому это разложение остается справедливым и для x=±1. В частности, при x=1 получаем сумму ряда Лейбница (гл. I, §4):

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Отметим, что этот знакочередующийся ряд сходится очень медленно. Поэтому он плохо приближает число π. Так, чтобы гарантировать ошибку меньше чем 10^{-4}, надо взять 5000 членов.

Замечание. Выше были рассмотрены разложения в ряд Маклорена некоторых основных элементарных функций.

Для разложения элементарных функций в степенной ряд используются следующие приемы.

1. Функция f(x) непосредственно разлагается в ряд Тейлора. Этот прием состоит из следующих этапов:

а) вычисляются производные всех порядков функции f(x) в точке x_0 и формально составляется ряд Тейлора;

б) находится область сходимости полученного ряда;

в) выясняется выполнение условия $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, т.е. определяется, является ли суммой ряда функция f(x).

Выше мы использовали этот прием при выводе разложений в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$, $(1+x)^m$.

2. Использование табличных разложений: см. полученные выше разложения (2), (4)–(7).

3. Использование сложения и вычитания рядов и умножения ряда на функцию (число).

Например, если $f(x)=x^2e^x$, то ряд для e^x умножается на x^2:

$$x^2e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} = x^2 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{n+2}}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty).$$

4. Использование дифференцирования и интегрирования степенных рядов. Выше этот способ использован при нахождении разложений $\cos x$ и $\ln(1+x)$.

§6. Приложение рядов к приближенным вычислениям

Числовые и функциональные ряды широко применяются в приближенных вычислениях. Остановимся на наиболее важных из этих приложений.

1. **Приближенное вычисление значений функции.**

Пусть нам известно разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Тогда точное значение функции $f(x)$ в любой точке этой окрестности может быть вычислено по ряду Тейлора, а приближенное ее значение – по частичной сумме этого ряда, которая является многочленом.

Возникающую при этом оценку остатка можно получить либо опираясь на теорему об оценке остаточного члена, либо непосредственно оценивая остаток ряда.

Так, например, в случае знакочередующегося ряда оценка остатка вытекает из теоремы Лейбница (гл.1 §4, следствие из теоремы Лейбница); в случае знакоположительного ряда мы стараемся подобрать другой ряд (обычно геометрический ряд), члены которого больше членов остатка и сумму которого мы можем найти.

В случае рядов Тейлора для абсолютной погрешности приближения частными суммами по формуле (6) §3 получаем

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right|, \qquad (1)$$

где точка ξ расположена между x и x_0.

Покажем на отдельных примерах, как применяются указанные методы оценки ошибки.

Пример 1. Вычислить число e с точностью до 0,001.

Решение. Воспользуемся разложением (2) §4 при x=1. Имеем

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots .$$

Взяв первые n+1 членов, получим приближенное равенство

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Оценим погрешность приближения с помощью остаточного члена ряда Маклорена [см. формулу (1)]. Так как $(e^x)^{(n+1)} = e^x$,

$$|R_n(x)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1},$$

где ξ лежит между 0 и x. При x=1

$$|R_n(1)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} (0<\xi<1).$$

В силу возрастания e^x на [0,1] $e^{\xi} < e^1 < 3$, и получим оценку:

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!}. \qquad (2)$$

Если n = 5, то $\frac{3}{(5+1)!} = \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} > 0{,}001$, а если n = 6, то $\frac{3}{(6+1)!} = \frac{1}{1680} < 0{,}001$. Поэтому для достижения требуемой точности достаточно взять n = 6. Итак, с точностью до 0,001

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}.$$

Каждое слагаемое выпишем с одним дополнительным знаком, чтобы к нашей ошибке не добавлялись ошибки от округления слагаемых:

$$e \approx 2{,}0000 + 0{,}5000 + 0{,}1667 + 0{,}0417 + 0{,}0083 + 0{,}0014 = 2{,}7181.$$

Следовательно, e = 2,718 с точностью до 0,001.

Покажем теперь, как можно оценить ошибку $R_n(1)$, пользуясь всем рядом для e^x (ниже воспользуемся формулой для суммы членов геометрического ряда, гл.1, §1):

$$|R_n(1)| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right] = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$$

Итак, мы получим оценку ошибки $\frac{1}{n!n}$, т.е. почти в 3 раза более точную, чем найденная выше оценка (2).

Пример 2. Вычислить $\sin 10^0$ с точностью 0,0001.

Решение. Воспользуемся разложением (4) §4, справедливым при всех значениях x. Переведем 10^0 в радианы: $10^0 = \frac{\pi}{18}$ и подставим в ряд (4) §4:

$$\sin\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 + \ldots.$$

Полученный ряд – знакочередующийся, его члены убывают по абсолютной величине и общий член стремится к нулю. Поэтому остаток ряда по абсолютной величине не превосходит первого отброшенного члена (гл.1, §4, следствие из теоремы Лейбница). Так как $\frac{\pi^3}{3!18^3} = 0{,}0001$, а $\frac{\pi^5}{3!18^5} = 0{,}0001$, то с точностью до 0,0001 получим

$$\sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3.$$

Если каждое слагаемое в выражении для $\sin\frac{\pi}{18}$ будет вычислено с шестью знаками, то, учитывая $\frac{\pi}{18} \approx 0{,}174533$, получим

$$\sin\frac{\pi}{18} \approx 0{,}173647 \approx 0{,}1736.$$

2. **Приближенное вычисление интегралов.**

Как мы знаем, существуют интегралы от элементарных функций, которые не являются элементарными функциями, и поэтому формула Ньютона-Лейбница для них неприменима. Например,

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{dx}{\ln x}.$$

Такие интегралы иногда бывает удобно вычислять с помощью рядов.

Пример 3. Вычислим

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

с тремя верными десятичными знаками.

Решение. Вычислим сначала

$$\int_0^x e^{-x^2}dx$$

разложением подынтегральной функции в степенной ряд. Заменяя в формуле (2) §4 x на $-x^2$, получим:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\ (-\infty<x<\infty)$$

и при любых $x \in (-\infty, \infty)$

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3!}\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n+1)}\frac{1}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\ .$$

Положим в этом разложении x = 1:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\frac{1}{7}+\frac{1}{4!}\frac{1}{9}-\frac{1}{5!}\frac{1}{11}+\frac{1}{6!}\frac{1}{13}-\dots .$$

Данный ряд является знакочередующимся, поэтому, рассуждая как в примере 2 и учитывая

$$\frac{1}{5!}\frac{1}{11} = 0{,}00075,\ \frac{1}{6!13} = 0{,}00004,$$

видим, что надо сохранить шесть первых членов разложения. Поэтому

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320} \approx 1{,}0000 - 0{,}3333 +$$

$$+ 0{,}1000 - 0{,}0238 + 0{,}0046 - 0{,}0008 = 0{,}7467.$$

Итак,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0{,}747.$$

Пример 4. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ с шестью верными десятичными знаками.

Решение. В силу формулы (4) §4, разделив почленно на x, найдем, что

$$\frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots .$$

Функция $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ не является элементарной, она называется интегральным синусом и обозначается символом si x:

$$\operatorname{si} x = \int_0^x \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^x \left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\dots\right)dx .$$

Итак, функция si x определяется как сумма ряда

$$\mathrm{si}\,x = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \frac{x^9}{9\cdot 9!} - \ldots \quad (-\infty < x < \infty).$$

Положим x=1:

$$\mathrm{si}\,1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \frac{1}{9\cdot 9!} - \frac{1}{11\cdot 11!} + \ldots .$$

Так как данный ряд является знакочередующимся, то, рассуждая как и выше (в примерах 2 и 3) и учитывая, что

$$\frac{1}{11\cdot 11!} = \frac{1}{11\cdot 39916800} \approx 0{,}000000002,$$

получим нужное приближение, если возьмем первые пять членов

$$\mathrm{si}\,1 \approx 1{,}000000 - 0{,}0555556 + 0{,}0016667 - 0{,}0000283 + 0{,}0000003.$$

После округления до шести знаков, получаем

$$\mathrm{si}1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = 0{,}946083,$$

причем все шесть знаков после запятой верны.

3. **Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.**

Если интегрирование дифференциального уравнения не сводится к квадратурам, то прибегают к приближенным методам интегрирования уравнений.

Пусть задано дифференциальное уравнение и начальные условия, определяющие частное решение (см. [12]).

Для нахождения частного решения применяют следующие два метода: метод неопределенных коэффициентов и разложение в ряд Тейлора.

Если исходное уравнение линейное, то решение уравнения в окрестности точки x_0, в которой заданы начальные условия, можно разложить в степенной ряд, расположенный по степеням разности $x-x_0$:

$$y = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots .$$

Продифференцируем этот ряд с неопределенными коэффициентами и подставим затем в уравнение вместо неизвестной функции и ее производных соответствующие ряды. В силу единственности разложения функции в степенной ряд (см. следствие из теоремы 1 §3) мы получаем тождество, из которого и определяем неизвестные коэффициенты ряда. При этом первые коэффициенты ряда (в числе, равном порядку уравнения) определяются из начальных условий. Если доказать сходимость полученного ряда, то можно быть уверенным, что он представляет искомое решение.

Пример 5. Записать в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения

$$y'' + xy = 0,$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Решение. Решение проведем способом неопределенных коэффициентов. Общее решение ищем в виде степенного ряда

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots\ .$$

Отсюда:

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots;$$

$$y''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + \ldots\ .$$

Подставим в уравнение $y'' = -xy$:

$$2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + 4\cdot 5a_5x^3 + \ldots = -x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной, получаем

$$a_2=0,\ 2\cdot 3a_3 = -a_0,\ 3\cdot 4a_4 = -a_1,\ 4\cdot 5a_5 = -a_2,\ 5\cdot 6a_6 = -a_3,$$
$$6\cdot 7a_7 = -a_4,\ 7\cdot 8a_8 = -a_5,\ 8\cdot 9a_9 = -a_6.$$

Откуда, учитывая начальные условия $a_0 = y(0) = 1$, $a_1 = y'(0)=0$, выводим

$$y = 1-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1\cdot 4}{6!}x^6-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9+\ldots\ .$$

В случае нелинейного уравнения последовательным дифференцированием находят коэффициенты Тейлора разложения неизвестного решения дифференциального уравнения в ряд Тейлора.

Пример 6. Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = xy^2 + 1$$

при $y(1) = 0$.

Решение. Это уравнение нелинейное.

Для нахождения коэффициентов разложения в степенной ряд

$$y = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \dots$$

продифференцируем исходное уравнение несколько раз по переменной x:

$$y'' = y^2 + 2xyy';$$

$$y''' = 4yy' + 2x(y')^2 + 2xyy'';$$

$$y^{(IV)} = 6(y')^2 + 6yy'' + 6xy'y'' + 2xyy'''.$$

Полагая в исходном уравнении и во всех равенствах $x=1$ и принимая во внимание, что $y\big|_{x=1} = 0$, последовательно найдем

$$y'\big|_{x=1} = 1,\ y''\big|_{x=1} = 0,\ y'''\big|_{x=1} = 2,\ y^{(IV)}\big|_{x=1} = 6,\ \dots .$$

Поэтому:

$$a_0 = y\big|_{x=1} = 0;\ a_1 = y'\big|_{x=1} = 1;\ a_2 = \frac{y''(1)}{2!} = 0;\ a_3 = \frac{1}{3!}y'''\big|_{x=1} = \frac{1}{3},$$

$$a_4 = \frac{1}{4!}y^{(IV)}\big|_{x=1} = \frac{1}{4}, \dots .$$

Итак,

$$y(x) = (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \dots .$$

ГЛАВА 3. РЯДЫ ФУРЬЕ

§1. Периодические функции

Во многих явлениях науки и техники встречаются периодические процессы, т.е. процессы, в которых явления воспроизводятся в прежнем виде по истечении некоторого промежутка времени T, называемого периодом.

Примерами таких процессов могут служить вращение Земли вокруг Солнца, незатухающие колебания маятника, электрические колебания, установившееся движение паровой машины и т.д.

Различные величины, связанные с рассматриваемым периодическим явлением, по истечении периода T принимают свои прежние значения.

Например, хотя на протяжении года расстояние Земли от Солнца меняется, по истечении года оно принимает первоначальное значение; сила и напряжение переменного тока принимают первоначальные значения и т.п. Все эти величины являются периодическими функциями времени.

Функция $\varphi(t)$ называется периодической функцией с периодом $T(T\neq 0)$, если для всех значений t выполняется равенство

$$\varphi(t+T) = \varphi(t).$$

Понятно, что если T – один из периодов функции $\varphi(t)$, то все числа вида kT, $k = 0,\pm1\pm2,...$, также являются ее периодами. Среди положительных периодов непрерывной периодической функции $\varphi(t)$ всегда есть наименьший. Он обладает тем свойством, что все остальные периоды являются его кратными.

Отметим, что если функция $\varphi(t)$ имеет период T, то достаточно построить график функции на любом промежутке длиной $|T|$, а затем периодически продолжить его на всю числовую ось.

Простейшим периодическим процессом является гармоническое колебание. Отклонение точки от положения равновесия при гармоническом колебании задается формулой:

$$y = A\sin(\omega t+\alpha). \qquad (1)$$

Число A называется амплитудой,

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \qquad (2)$$

– частотой и α-начальной фазой колебания. Наименьший период T функции (1) определяется из (2): $T=\frac{2\pi}{\omega}$, а все остальные ее периоды задаются формулой $T_k=\frac{2k\pi}{\omega}$, где $k = 0,\pm1,\pm2,...$

В дальнейшем мы будем называть функцию вида (1) синусоидальной функцией. График такой функции изображен на рис. 5.

Синусоидальную функцию можно записать также в виде

$$y = a\cos\omega t + b\sin\omega t,$$

что непосредственно вытекает из (1), при этом $a = A\sin\alpha$, $b = A\cos\alpha$.

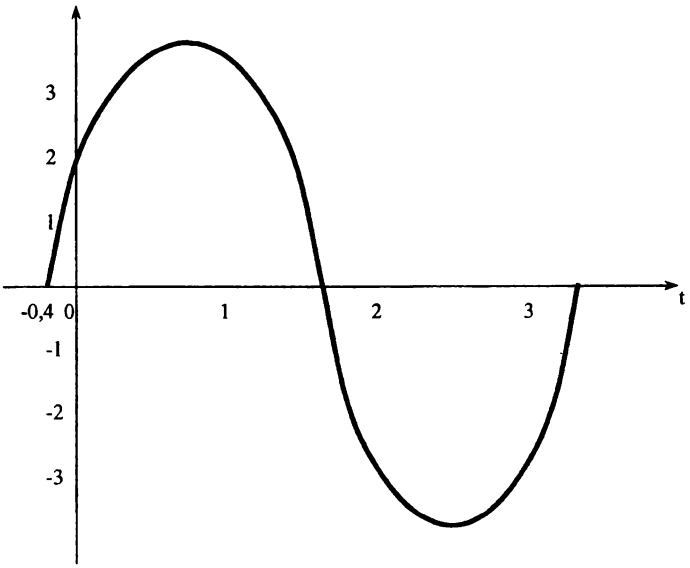


Рис. 5

Справедливо и обратное: любая функция вида $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ является синусоидальной функцией.

Действительно,

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega t\right),$$

откуда и следует

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = A(\sin\alpha\cos\omega t + \cos\alpha\sin\omega t) = A\sin(\omega t+\alpha),$$

где $A=\sqrt{a^2+b^2}$,

$$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Из подобных простейших функций можно получить более сложные. Нетрудно видеть, что при сложении двух синусоидальных функций, имеющих одну и ту же частоту, получается снова синусоидальная функция с той же самой частотой. Но если синусоидальные величины имеют разные частоты (и соответственно различные периоды), то можно

получить функции, по своему характеру значительно отличающиеся от синусоидальной функции.

Это справедливо для конечного числа слагаемых. Еще в большей степени это имеет место для суммы бесконечного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(k\omega t+\alpha_k).$$

Естественно поставить обратный вопрос: можно ли данную периодическую функцию $\varphi(t)$ периода T представить в виде суммы конечного или бесконечного множества синусоидальных функций

$$\varphi(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t+\alpha_k), \qquad (3)$$

где постоянные $A_k(k = 0,1,...)$ и $\alpha_k(k = 1,2,...)$ определяются функцией φ, а частота ω задается формулой (2)?

Если это возможно, то сложное колебание, задаваемое периодической функцией $\varphi(t)$, разлагается на отдельные гармонические колебания.

Процесс разложения периодической функции на гармонические составляющие называется **гармоническим анализом**.

Если за независимую переменную выбрать

$$x=\omega t=\frac{2\pi}{T}t,$$

то получится функция от x:

$$f(x)=\varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

тоже периодическая, но со стандартным периодом 2π. Разложение (3) примет вид:

$$f(x) = A_0 + A_1\sin(x+\alpha_1) + A_2\sin(x+\alpha_2) + A_3\sin(x+\alpha_3) + \ldots =$$

$$= A_0+\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx+\alpha_k).$$

Отсюда

$$f(x) = A_0+\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\sin kx\cdot\cos\alpha_k+\cos kx\cdot\sin\alpha_k)$$

и, обозначая

$$a_0 = 2A_0,\ A_k\sin\alpha_k = a_k,\ b_k = A_k\cos\alpha_k\ (k=1,2,\ldots),$$

придем к окончательной форме тригонометрического разложения

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \qquad (4)$$

Здесь функция от угла x, имеющая период 2π, разлагается в тригонометрический ряд по косинусам и синусам углов, кратных x.

Как обычно, сходимость ряда (4) в точке x понимается следующим образом:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \equiv \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right],$$

при этом функция

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \qquad (5)$$

называется **тригонометрическим многочленом** (полиномом).

Поэтому вопрос о сходимости ряда (4) в точке x тесно связан с проблемой приближения (аппроксимации) периодической функции тригонометрическими многочленами (5).

Для широкого класса функций такая задача решается положительно.

К.Вейерштрасс показал, что всякая непрерывная 2π-периодическая функция f(x) может быть представлена в виде равномерно сходящейся последовательности тригонометрических многочленов (5).

Изучение тригонометрических рядов важно не только с точки зрения колебательных процессов, с которых мы начали. Необходимо отметить, что подобные разложения и их обобщения часто возникают и при исследовании функций, заданных в определенном конечном промежутке и совсем не связанных с колебательными процессами.

И хотя в таких случаях функции можно разложить в ряды Тейлора (или Маклорена), тем не менее разложения в тригонометрические ряды (и их обобщения) обладают рядом преимуществ (см. подробнее об этом в §4).

§2. Ортогональные системы

Нашей ближайшей целью является вычисление коэффициентов ряда (4) из §1 для функции f(x).

Для этой цели нам понадобятся некоторые соотношения, называемые соотношениями ортогональности.

Система ненулевых функций

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots = \{\varphi_n(x),\}\ (n=0,1,2,\ldots)$$

называется **ортогональной на промежутке [a,b]**, если для всех m и n таких, что $m \neq n$, выполняются соотношения:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0\ (n \neq m;\ n,m=0,1,2,\ldots).$$

Ортогональная система функций называется **нормированной (ортонормированной, нормальной)**, если для всех n выполняются равенства:

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1\ (n=0,1,2,\ldots).$$

Положим $\|\varphi_n\|^2 = \int_a^b \varphi_n^2(x)dx\ (n=0,1,2,\ldots)$. Величины $\|\varphi_n\|$ называются **нормами** функций $\varphi_n(x)$ $(n=0,1,\ldots)$.

Если система $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ ортогональна, то система функций

$$\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}\right\}\ (n=0,1,2,\ldots) \qquad (1)$$

будет уже нормированной.

Примеры.

1. Покажем, что система функций

$$\{1,\ \cos nx,\ \sin nx\} = \qquad (2)$$

$$= \{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots\}$$

ортогональна на промежутке $[-\pi,\pi]$.

Действительно, если k – целое число, не равное нулю, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=\frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0 \quad (k=1,2,\ldots), \tag{3}$$

так как $\sin k\pi = 0$ при всех целых значениях k.

Аналогично, при всех целых значениях k

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=0 \quad (k = 0,1,2,\ldots). \tag{4}$$

Покажем, что при всех различных неотрицательных k и n ($k\neq n$):

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin nx\,dx=0 \quad (k,n = 1,2,\ldots;\ k\neq n); \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos nx\,dx=0 \quad (k,n = 1,2,\ldots;\ k\neq n), \tag{6}$$

а также, что для любых целых неотрицательных k и n выполняется равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos nx\,dx=0 \quad (k,n = 1,2,\ldots). \tag{7}$$

Для этого заметим, что

$$\sin kx\,\sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos(k-n)x-\cos(k+n)x\right].$$

Так как $k-n\neq 0$ и $k+n\neq 0$, то в силу (3) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k-n)x\,dx-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k+n)x\,dx=0,$$

что и доказывает (5). Соотношения (6) и (7) получаются аналогичным образом.

Вычислим теперь нормы элементов из системы (2). Нетрудно видеть, что

$$\|\sin kx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\,dx = \pi$$

и

$$\|\cos kx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = \pi.$$

Тогда:

$$\|\sin kx\| = \sqrt{\pi};$$
$$\|\cos kx\| = \sqrt{\pi};$$
$$\|1\| = \sqrt{2\pi}.$$

Поэтому система тригонометрических функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

будет ортонормированной на промежутке $[-\pi,\pi]$. Здесь мы использовали соотношения (1).

2. Системы функций

$$\{\cos kx\} = \{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos kx, \ldots\} \tag{9}$$

и

$$\{\sin kx\} = \{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin kx, \ldots\} \tag{10}$$

ортогональны на промежутке $[0,\pi]$.

Действительно, следующие соотношения очевидны:

$$\int_0^{\pi} \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} = 0 \quad (k=1,2,\ldots);$$

$$\int_0^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(k+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(k-n)x\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{k+n}\sin(k+n)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\frac{1}{k-n}\sin(k-n)x\Big|_0^{\pi}=0 \quad (k=0,1,2,\ldots;\ k\neq n)\ .$$

С другой стороны, подсчет норм

$$\|\cos kx\|^2=\int_0^{\pi}\cos^2 kx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2kx)dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\|1\|^2=\int_0^{\pi}dx=\pi$$

показывает, что система тригонометрических функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos kx\right\}\ (k=1,2,\ldots) \tag{11}$$

является нормированной на промежутке $[0,\pi]$.

Аналогично, система тригонометрических функций

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx\right\}\ (k=1,2,\ldots) \tag{12}$$

является ортонормированной на промежутке $[0,\pi]$.

3. Система тригонометрических функций

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi kx}{\ell},\ \sin\frac{\pi kx}{\ell}\right\}\ (k=1,2,\ldots) \tag{13}$$

ортогональна на промежутке $[-\ell\,,\ell\,]$.

Например, с помощью замены переменных $t=\frac{\pi x}{\ell}$ соотношение

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{\pi kx}{\ell}\sin\frac{\pi kx}{\ell}dx=0\ \ (k,n=1,2,\ldots)$$

сводится к (7).

Аналогично доказываются и остальные соотношения ортогональности.

С другой стороны,

$$\|1\|^2 = 2\ell;$$

$$\left\|\cos\frac{k\pi x}{\ell}\right\|^2 = \left\|\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right\|^2 = \ell.(k = 1,2,\ldots).$$

Поэтому система тригонометрических функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cdot\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right\} \quad (k=1,2,\ldots) \tag{14}$$

является ортонормированной на промежутке $[-\ell, \ell]$.

4. Несущественно разнятся от только что рассмотренных следующие системы:

$$\left\{1, \cos\frac{k\pi x}{\ell}\right\} = \left\{1, \cos\frac{\pi x}{\ell}, \cos\frac{2\pi x}{\ell}, \ldots, \cos\frac{\pi k x}{\ell}, \ldots\right\} (k=1,2,\ldots); \tag{15}$$

$$\left\{\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right\} = \left\{\sin\frac{\pi x}{\ell}, \sin\frac{2\pi x}{\ell}, \ldots, \sin\frac{k\pi x}{\ell}, \ldots\right\} (k=1,2,\ldots). \tag{16}$$

Каждая из них представляет собой ортогональную систему на промежутке $[0, \ell]$.

Системы

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\ell}}, \sqrt{\frac{2}{\ell}}\cdot\cos\frac{\pi x}{\ell}, \sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos\frac{2\pi x}{\ell}, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\ell}}\cdot\cos\frac{k\pi x}{\ell}, \ldots\right\}$$

и

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\frac{\pi x}{\ell}, \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\frac{2\pi x}{\ell}, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\frac{k\pi x}{\ell}, \ldots\right\}$$

являются ортонормированными на промежутке $[0, \ell]$.

§3. Определение ряда Фурье

Для заданной функции f(x), имеющей период 2π, установим возможность тригонометрического разложения

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \qquad (1)$$

т.е. найдем набор коэффициентов a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_k, b_k, ...

Воспользуемся ортогональностью тригонометрической системы, доказанной в примере 1 §2.

Будем предполагать функцию f(x) интегрируемой в промежутке $[-\pi,\pi]$ – в собственном или несобственном смысле; в последнем случае дополнительно будем считать, что функция абсолютно интегрируема.

Допустим, что разложение (1) имеет место и проинтегрируем его почленно от $-\pi$ до π. Получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\pi a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right].$$

В силу соотношений (3) и (4) предыдущего параграфа все члены под знаком суммы будут нулями, поэтому

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\,. \qquad (2)$$

Для нахождения коэффициента a_n при n=1,2,... умножим обе части равенства (1) на cosnx и снова проинтегрируем почленно:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\cos nx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,\cos nx\,dx\right].$$

Первый член исчезает в силу (3) §2; все интегралы, стоящие под знаком суммы, обращаются в нуль [см. соотношения (5)–(7) предыдущего параграфа], кроме интеграла, при котором множителем стоит именно коэффициент a_n.

Следовательно, этот коэффициент вычисляется по формуле

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos ndx \ (n=1,2,...). \qquad (3)$$

Аналогично, умножая предварительно ряд (1) на sinnx и затем интегрируя почленно, определим коэффициент b_n:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin xdx \quad (n=1,2,...) \qquad (4)$$

Формулы (2)–(4) называются *формулами Эйлера-Фурье*, вычисленные по этим формулам коэффициенты a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ... – **коэффициентами Фурье периодической функции f(x)**, а ряд (1), в котором коэффициенты находятся по формулам (2)–(4), – **рядом Фурье (тригонометрическим рядом Фурье) функции f(x)**.

Нетрудно видеть, что проведенные выше манипуляции с рядами (почленные интегрирования) справедливы, когда ряд (1) сходится равномерно (см. глава 2, §1).

Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема (о единственности ряда Фурье). Если функция, имеющая период 2π, разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд (1), то коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам (2)–(4), то есть ряд (1) необходимо будет рядом Фурье функции f(x).

Замечания.

1. Интересно сравнить данное утверждение с теоремой 1 §3 гл.2 о единственности ряда Тейлора.

2. Если не предполагать наперед равномерной сходимости, то приведенные выше рассуждения не доказывают разложимость в ряд Фурье.

Поэтому можно рассматривать лишь формальный ряд Фурье для периодической "порождающей" функции f(x):

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx); \qquad (5)$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx \ (k=0,1,2,...); \qquad (6)$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx \quad (k=1,2,\ldots). \tag{7}$$

Используем изложенный выше прием для нахождения коэффициентов общих ортогональных разложений. Пусть в промежутке [a,b] дана ортогональная система $\{\varphi_n(x)\}$ (n=0,1,2,...). Попытаемся разложить определенную в [a,b] функцию f(x) в ряд по системе $\{\varphi_n(x)\}$ (n=0,1,2,...) вида

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots . \tag{8}$$

Для определения коэффициентов этого разложения, допуская его возможность, поступим так, как мы это сделали выше в частном случае. А именно, умножив обе части разложения (8) на $\varphi_n(x)$, проинтегрируем его почленно:

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_n(x)dx .$$

В силу ортогональности элементов системы $\{\varphi_n\}$ (n=0,1,...) все интегралы справа, кроме одного, будут нулями, поэтому

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{9}$$

Формулы (6) и (7) являются частными случаями (9).

Ряд (8), коэффициенты которого вычисляются по формулам (9), называется **рядом Фурье данной функции f(x) по системе** $\{\varphi_n\}$ (n=0,1,...), c_n – *коэффициентами Фурье функции f(x)* по системе $\{\varphi_n\}$ (n=0,1,2,...):

$$c_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{10}$$

Замечания.

1. Конечно, в общем случае разложение (8) следует понимать как формальный ряд Фурье по системе $\{\varphi_n\}$ (n=0,1,2,...):

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x) .$$

2. Тригонометрический ряд Фурье (5) можно рассматривать как ряд Фурье по ортонормированной системе (8) §2. Действительно, подставим в формулы (8) и (10) их значения в случае тригонометрической системы [см. формулы (8) §2]. Имеем

$$f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}dx\right)\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}dx\right)\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx\right)\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx\right)\sin kx,$$

что в силу (2)–(4) приводит к разложению (1)

Замечание. Разложения в ряды по ортогональным системам функций играют важную роль при решении многих важных задач математической физики; некоторые из них приведены в книгах [1–3], т.3; [4].

§4. Сходимость тригонометрического ряда Фурье

При выводе формул (2)–(4) предыдущего параграфа предполагалось, что функция f(x) разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд (1) §3. Если же такого предположения не делать, а допустить только, что для функции f(x) существуют все интегралы, стоящие в правых частях формул для коэффициентов Фурье, то по этим формулам можно вычислять коэффициенты a_0, $a_к$ и b_k (k=1,2,...) и составить тригонометрический ряд Фурье функции f(x).

Как и в случае рядов Тейлора, возникают вопросы: является ли построенный таким образом ряд Фурье сходящимся, и, если он сходится, то можно ли утверждать его сходимость к порождающей функции f(x)?

Чтобы ответить на эти вопросы, введем следующие определения.

Функция f(x) называется кусочно-монотонной на промежутке [a,b], если этот промежуток можно разбить на конечное число отрезков $[a,a_1]$, $[a_1,a_2]$, ..., $[a_{n-1},b]$, внутри которых функция f(x) непрерывна и либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает, либо постоянна.

Функция f(x) удовлетворяет условиям Дирихле на промежутке [a,b], если:

– функция f(x) ограничена на [a,b];

– функция f(x) кусочно-монотонна на [a,b].

Класс функций, удовлетворяющих условиям Дирихле, весьма широк. При этом условиям Дирихле удовлетворяют не только функции, заданные на промежутке [a,b] одним аналитическим выражением, но и функции, задаваемые различными формулами на разных промежутках.

Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ при } -1\le x<0 \\ 1 \text{ при } 0\le x\le 1 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям Дирихле на промежутке [–1,1] (рис. 6).

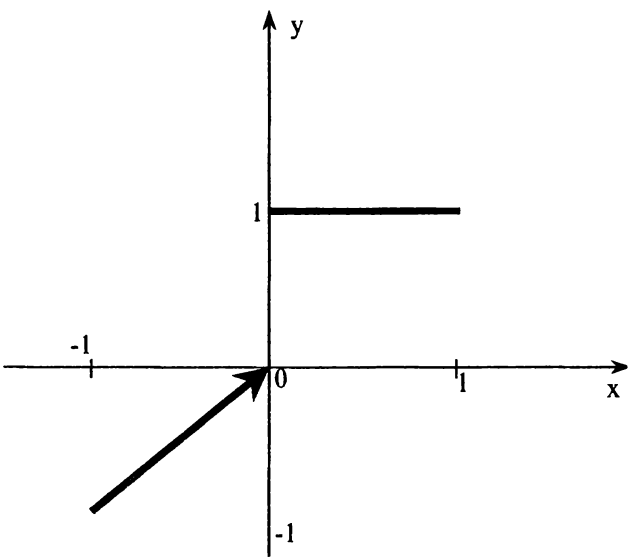


Рис. 6

Здесь на промежутке [–1,0] функция монотонно возрастает, а на промежутке [0,1] – постоянна.

Примером функции, не удовлетворяющей условиям Дирихле, является функция $y=\frac{1}{x}$ на промежутке [–1,1], так как в точке x=0 она имеет разрыв II рода.

Не удовлетворяет условиям Дирихле на промежутке [0,1] и функция $y=\sin\frac{\pi}{x}$, график которой изображен на рис. 7.

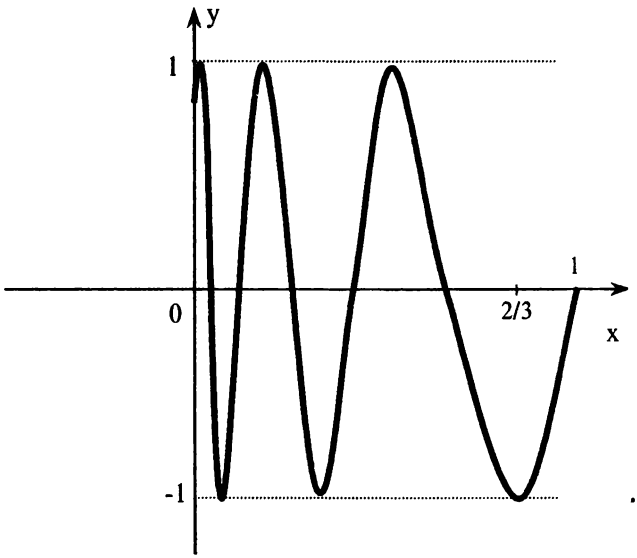


Рис.7

Эта функция имеет бесконечно много максимумов и минимумов на отрезке [0,1] в точках $x=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$. Поэтому отрезок [0,1] нельзя разбить на конечное число промежутков так, чтобы на каждом из них функция $y=\sin\frac{\pi}{x}$ была бы монотонной. Сформулируем теперь утверждение, дающее достаточные условия разложимости функции в ряде Фурье.

Теорема Дирихле. Пусть функция f(x) удовлетворяет условиям Дирихле на промежутке $[-\pi,\pi]$. Тогда ее ряд Фурье

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \\ a_k+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx \quad (k=0,1,2,\ldots) \\ b_k+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx \quad (k=1,2,\ldots) \end{cases} \qquad (1)$$

сходится к порождающей функции f(x) во всех точках, где эта функция непрерывна.

В точках x_0, где функция f(x) разрывна, ряд Фурье сходится к значению

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}. \qquad (2)$$

В точках $-\pi$ и π ряд Фурье сходится к значению

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \qquad (3)$$

Доказательство теоремы Дирихле мы опускаем, его можно найти в книге [3], т.2, гл.XIX.

Кроме теоремы Дирихле, существует еще ряд других теорем, дающих достаточные условия сходимости ряда Фурье. При этом требования, накладываемые на функцию f(x), отличны от условий Дирихле, что подтверждается соответствующими примерами ([3], т.2, гл.XIX).

Функция f(x) называется кусочно-дифференцируемой на промежутке [a,b], если сама функция и ее производная могут иметь на этом отрезке точки разрыва лишь только первого рода и множество точек разрыва не более чем конечно.

График кусочно-дифференцируемой функции (рис.8) состоит из конечного числа "гладких" дуг (на которых f(x) и f'(x) непрерывны), при этом в точках "стыка" (и в крайних точках a и b) односторонняя производная понимается в следующем смысле:

$$f'_+(x_0)=\lim_{t\to t+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},\quad f'_-(x_0)=\lim_{t\to t-0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}$$

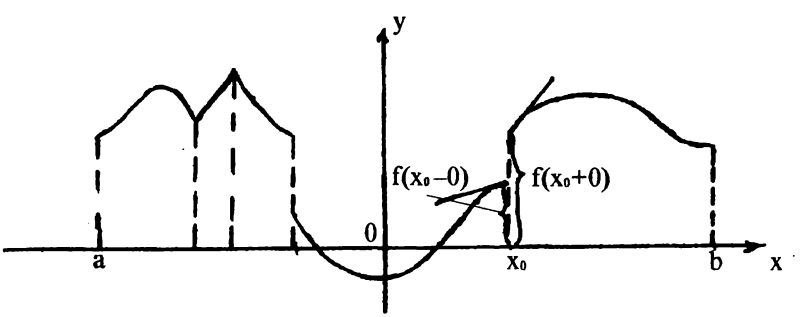


Рис.8

Теорема Дини-Липшица. Если функция f(x) кусочно-дифференцируема в интервале $(-\pi,\pi)$, то ее ряд Фурье сходится к f(x) во всех точках, где она непрерывна.

Если x_0 – точка разрыва I рода, то ряд Фурье сходится к значению (2), а в граничных точках интервала к значению (3). Условия теорем Дирихле и Дини-Липшица относятся к очень широкому классу функций.

Отметим, что существуют примеры функций, удовлетворяющих условиям Дирихле, но не удовлетворяющих условиям Дини-Липшица, и наоборот ([3], т.3, гл.XIX).

Как показал Дю-Буа-Реймон (1871 г.), существуют непрерывные периодические функции, ряды Фурье которых расходятся в некоторых точках.

Замечание. Условия, накладываемые на функцию при разложении ее в ряд Фурье, значительно менее ограничительны, чем при разложении ее в ряд Тейлора. Действительно, если функция представлена рядом Тейлора, то она во всем интервале сходимости бесконечно дифференцируема.

С другой стороны, существование и непрерывность (даже не во всех точках) первой производной достаточны для разложимости в ряд Фурье.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию f(x), периодическую с периодом 2π и на промежутке $-\pi<x\le\pi$ заданную выражением

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{при } -\pi<x\le 0\\ \dfrac{x^2}{\pi} & \text{при } 0<x\le\pi\end{cases}$$

1. Данная функция, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы Дирихле: на промежутках $(-\pi,0)$ и $(0,\pi)$ функция непрерывна (и ограничена) и монотонна (убывает на $(-\pi,0]$ и возрастает на $(0,\pi]$). Покажем, что и стыки интервалов являются точками непрерывности. В силу периодичности достаточно проверить точки x=0 и $x=\pi$.

Проверим непрерывность в точке x=0:

$$f(0)=(-x)\big|_{x=0}=0;$$

$$f(-0)=\lim_{x\to-0}(-x)=0,\ f(t+0)=\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{\pi}=0.$$

Итак, f(0) = f(−0) = f(+0)=0.

Проверим непрерывность в точке $x=\pi$. В силу периодичности f(x) имеет место равенство

$$\lim_{x\to\pi+0} f(x)=\lim_{x\to-\pi+0} f(x).$$

Поэтому $f(\pi)=\pi$:

$$f(\pi-0)=\lim_{x\to\pi-0}\frac{x^2}{\pi}=\pi;$$

$$f(\pi+0)=\lim_{x\to\pi+0} f(x)=\lim_{x\to-\pi-0}(-x)=\pi;$$

Тогда

$$f(\pi-0)=f(\pi+0)=f(\pi)=\pi.$$

Таким образом, данная функция непрерывна на всей числовой оси.

В силу теоремы Дирихле искомая функция f(x) разлагается в ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_n\cos kx+b_k\sin kx), \tag{4}$$

где

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx \quad (k=0,1,2\ldots); \tag{5}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx \quad (k=1,2\ldots), \tag{6}$$

причем ряд (4) сходится к порождающей его функции f(x) на всей числовой очи, так как f(x) всюду непрерывна.

2. Нетрудно видеть, что исходная функция является функцией общего положения, поэтому не будет упрощения при построении ряда Фурье и вычислении ее коэффициентов.

3. Построим график функции f(x) на промежутке $(-\pi,\pi)$ и продолжим его периодически на всю числовую ось (рис.9).

4. Вычислим коэффициенты Фурье для заданной функции f(x).

Имеем [см.(1)]:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2dx=\frac{5}{6}\pi;$$

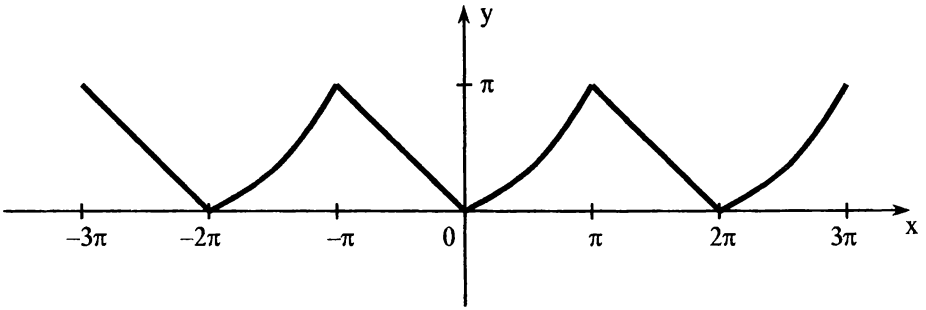


Рис.9

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos kx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos kx\,dx,$$

$(k = 1,2,...);$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin kx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\sin kx\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin kx\,dx+\frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}x^2\sin kx\,dx$$

$(k = 1,2,...).$

Вычислим отдельно следующие интегралы, это будет полезно в дальнейшем:

$$I_k^{(1)}=\int_0^{\pi}x\cos kx\,dx,\qquad I_k^{(2)}=\int_0^{\pi}x\sin kx\,dx,$$
$$I_k^{(3)}=\int_0^{\pi}x^2\cos kx\,dx,\qquad I_k^{(4)}=\int_0^{\pi}x^2\sin kx\,dx. \tag{7}$$

Вычислим значения этих интегралов с помощью интегрирования по частям.

Имеем:

$$I_k^{(1)}=\int_0^{\pi}x\cos kx\,dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos kx & v=\dfrac{\sin kx}{k}\end{vmatrix}=x\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx=$$

$$\frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{k^2}\left[(-1)^k-1\right]=\begin{cases}-\dfrac{2}{k^2} & \text{при k – нечетном}\\ 0 & \text{при k – четном}\end{cases} \tag{8}$$

Здесь использованы соотношения $\sin k\pi=0$, $\cos k\pi=(-1)^k$.
Аналогично

$$I_k^{(2)}=\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin kx\,dx & v=-\dfrac{\cos kx}{k}\end{matrix}\right|=-x\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx= \tag{9}$$

$$=-\frac{\pi\cos k\pi}{k}+\frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_0^{\pi}=-\frac{\pi(-1)^k}{k}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{k}.$$

Вычислим значение $I_k^{(3)}$, имеем

$$I_k^{(3)}=\int_0^{\pi} x^2\cos kx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x^2 & du=2x\,dx\\ dv=\cos kx\,dx & v=\dfrac{\sin kx}{k}\end{matrix}\right|=\frac{x^2\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx= \tag{10}$$

$$=-\frac{2}{k}\cdot(-1)^{k+1}\frac{\pi}{k}=(-1)^k\frac{2\pi}{k^2}.$$

Здесь использовано значение $I_k^{(2)}$.

Вычислим $I_k^{(4)}$, как и выше:

$$I_k^{(4)}=\int_0^{\pi} x^2\sin kx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x^2 & du=2x\,dx\\ dv=\sin kx\,dx & v=-\dfrac{\cos kx}{k}\end{matrix}\right|=-\frac{x^2\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx=$$

$$=-\frac{\pi^2(-1)^k}{k}+\frac{2}{k^3}\left[(-1)^k-1\right]=(-1)^{k+1}\frac{\pi^2}{k}+\frac{2}{k^3}\left[(-1)^k-1\right].$$

Подставим найденные значения интегралов в выражение для коэффициентов Фурье a_k и b_k:

$$a_k=\frac{1}{\pi}I_1^{(k)}+\frac{1}{\pi^2}I_3^{(k)}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k-1}{k^2}+\frac{1}{\pi^2}(-1)^k\frac{2\pi}{k^2}=\frac{(-1)^k-1+(-1)^k\cdot 2}{k^2\pi}=$$

$$=\frac{3(-1)^k-1}{\pi k^2}=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{при k нечетном}\\ +\dfrac{2}{\pi k^2} & \text{при k четном,}\end{cases}$$

и

$$b_k=-\frac{1}{\pi}I_2^{(k)}+\frac{1}{\pi^2}I_4^{(k)}=-\frac{1}{\pi}\cdot(-1)^{k+1}\frac{\pi}{k}+\frac{1}{\pi^2}\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi^2}{k}+\frac{2}{k^3}[(-1)^k-1]\right\}=($$

$$=(-1)^k\frac{1}{k}+(-1)^{k+1}\frac{1}{k}+\frac{2}{\pi^2k^3}[(-1)^k-1]=\frac{2}{\pi^2k^3}[(-1)^k-1]=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi^2k^3} & \text{при к нечетном}\\ 0 & \text{при к четном,}\end{cases}$$

так как сумма $(-1)^k+(-1)^{k+1}=0$ при всех k (четных и нечетных).

Запишем теперь ряд Фурье данной функции

$$f(x)=\frac{5}{12}\pi+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{3(-1)^k-1}{\pi k^2}\cos kx+\frac{2}{\pi^2k^3}[(-1)^k-1]\sin kx\right\}=\frac{5}{12}\pi-\frac{4}{\pi}\cos x-$$

$$-\frac{4}{\pi^2}\sin x+\frac{1}{2\pi}\cos 2x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x-\frac{4}{9\pi^2}\sin 3x+\frac{1}{4\pi}\cos 4x+\dots .$$

Этот ряд сходится к порождающей функции f(x) на всей числовой оси.

Замечание. Нетрудно видеть, что функция f(x) удовлетворяет условиям теоремы Дини-Липшица, и поэтому сходимость полученного ряда Фурье может быть также исследована с помощью этого признака.

§5. Ряды Фурье четных и нечетных периодических функций

Напомним сначала некоторые известные факты.

Пусть функция f(x) задана на всей числовой оси или на некотором промежутке (–a,a), симметричном относительно начала координат.

Функция f(x) называется четной, если для каждого $x \in (-a,a)$

$$f(-x) = f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси 0y (рис.10)

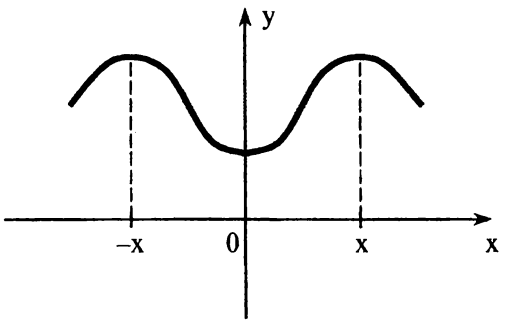


Рис.10

Для четной интегрируемой функции имеем

$$\int_{-a}^{a} f(x)d = 2\int_{0}^{a} f(x)dx\,. \qquad (1)$$

Функцию f(x) назовем нечетной, если для каждого x

$$f(-x) = -f(x).$$

В частности, для такой функции

$$f(0) = 0.$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 11).

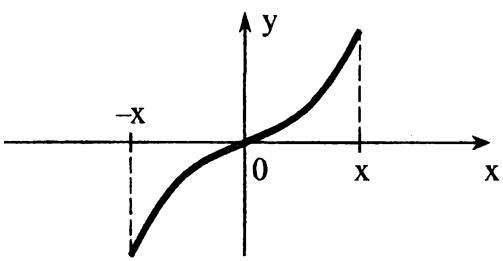


Рис. 11

Для нечетной интегрируемой функции имеем

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad (2)$$

Напомним также следующие простые свойства четных и нечетных функций:

1) произведение двух четных и двух нечетных функций есть функция четная;

2) произведение четной и нечетной функции есть функция нечетная.

Выясним структуру рядов Фурье для четных и нечетных функций.

Пусть f(x) – четная функция, заданная на промежутке $[-\pi,\pi]$ (или же четная периодическая функция).

Тогда в силу указанных выше свойств получаем:

$f(x) \cdot \cos nx$ $(n=0,1,...)$ – четная функция,

$f(x) \cdot \sin nx$ $(n=1,2,...)$ – нечетная функция.

Поэтому в силу соотношений (1) и (2) для коэффициентов Фурье четной функции f(x) справедливы следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,2,...) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 \quad (n=1,2,...) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Значит, для **четной функции f(x) ряд Фурье** содержит лишь косинусы (четные функции):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \qquad (4)$$

При этом коэффициенты Фурье вычисляются по формулам (3).

Пусть теперь f(x) – нечетная функция, заданная на промежутке $[-\pi,\pi]$ (или же нечетная периодическая функция). Следовательно, в этом случае $f(x)\cos nx$ $(n=0,1,...)$ – нечетная функция, $f(x)\sin nx$ $(n=1,2,...)$ – четная функция.

Как и выше, получаем

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \quad (n=0,1,2,...) \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,...) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Таким образом, **ряд Фурье нечетной функции** содержит лишь синусы (нечетные функции):

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx, \qquad (6)$$

где коэффициенты Фурье b_n (n=1,2,...) вычисляются по формулам (5).

Отметим, что так как ряд (6) содержит лишь синусы, то он всегда сходится к нулевому значению в точках $x=-\pi$, $x=0$, $x=\pi$ (и вообще $x = k\pi$, $k = 0,\pm1, \pm2,...$) независимо от значений нечетной функции в этих точках.

Исследование сходимости рядов Фурье для четных и нечетных функций может быть проведено с помощью признаков Дирихле и Дини-Липшица, при этом условия на функцию f(x) достаточно наложить на промежутке $[0, \pi]$.

Замечание. Можно и прямо строить теорию для рядов (4), отправляясь от тригонометрической системы

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos nx, \ldots$$

а теорию рядов (6) – от системы

$$\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots$$

[см. формулы (9)–(12) из §2].

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1 \text{ при } -\pi<x<0\\ +1 \text{ при } 0<x<\pi\end{cases}$$

Решение.

1. На промежутке $(-\pi,\pi)$ заданная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле.

Ее периодическое продолжение на всю числовую ось имеет вид (рис.12).

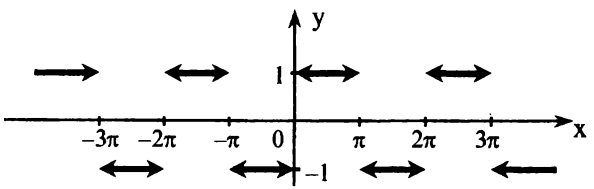


Рис.12

Построенная функция имеет точки разрыва первого рода $n\pi$ ($n=0, \pm1, \pm2,...$).

2. Так как заданная функция является нечетной, то ее ряд Фурье будет содержать только синусы.

3. Коэффициенты b_n найдутся по формуле (5), в которую следует подставить $f(x)=1$:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi n}[\cos\pi n-\cos 0]=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, \text{ если } n \text{ четное}\\ \dfrac{4}{n\pi}, \text{ если } n \text{ нечетное}\end{cases}$$

Если $n=2k-1$ ($k=1,2,3,...$), то

$$b_n=\frac{4}{\pi}\frac{1}{2k-1}\quad (k=1,2,...)$$

и потому ряд Фурье данной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x.$$

В развернутом виде этот ряд запишется так:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right).$$

Этот результат можно записать и следующим образом:

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<x<\pi\\ -1 \text{ при } -\pi<x<0\end{cases}$$

Отметим, что полученный ряд содержит бесконечную последовательность непрерывных функций, и оказывается, что сумма этих функций является разрывной кусочно-постоянной функцией.

По теореме Дирихле ряд, стоящий слева, сходится в точках разрыва к среднему арифметическому значению. Например, в точке $x=0$ он сходится к значению

$$\frac{f(-0)+f(+0)}{2}=\frac{-1+1}{2}=0.$$

4. Изобразим на чертеже частичные суммы полученного ряда (рис.13):

$$S_1=\frac{4}{\pi}\sin x,\ S_3=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}\right),\ S_5=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}\right).$$

Графики S_1, S_3, S_5 наглядно показывают, что полученный ряд аппроксимирует разрывную ступенчатую функцию.

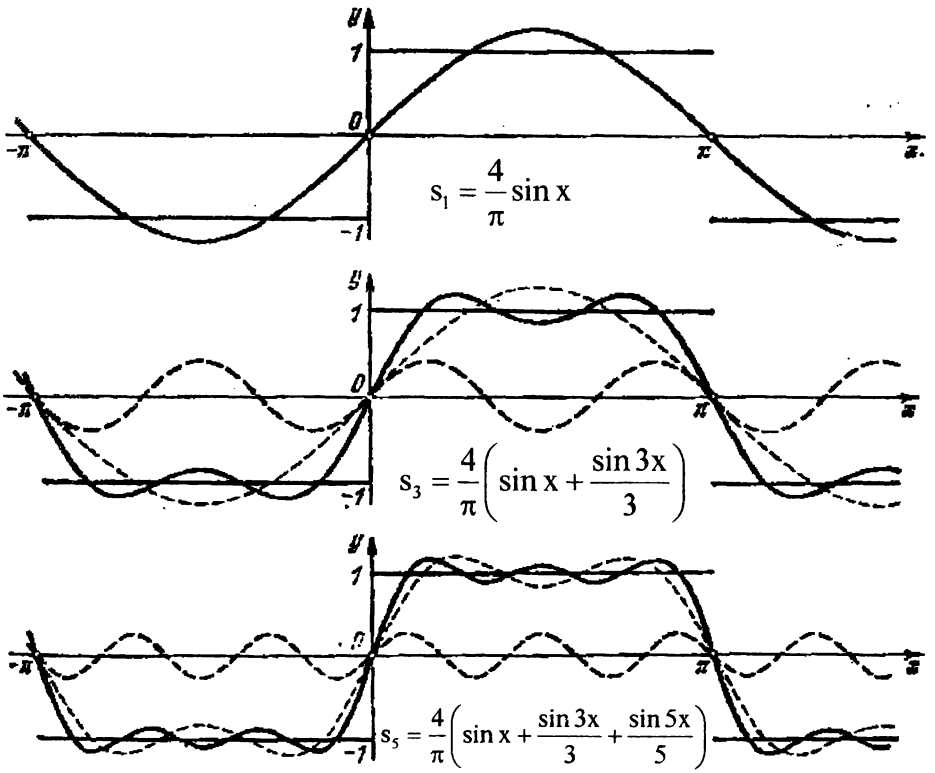


Рис.13

Пример 2. Разложить в ряд функцию $f(x) = -x$, если $-\pi \le x \le 0$, $f(x) = x$, если $0 \le x \le \pi$.

Эту функцию можно задать иначе: $f(x) = |x|$, $-\pi \le x \le \pi$.

Решение.

1. На промежутке $[-\pi,\pi]$ данная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле.

2. Ее периодическое продолжение на всю числовую ось имеет вид (рис.14):

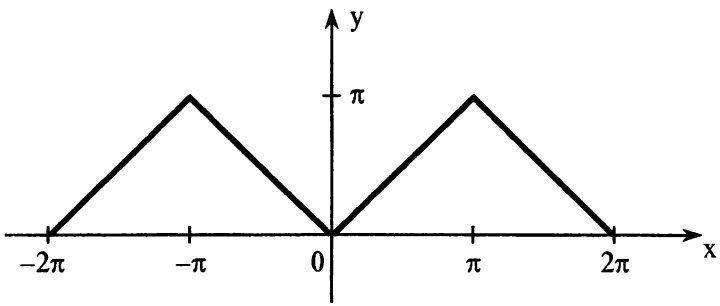


Рис.14

Построенная функция непрерывна на всей числовой оси.

2. Заданная функция – четная. Ее ряд Фурье будет содержать только постоянную составляющую и косинусы. Коэффициенты a_n $(n=0,1,2,...)$ определяются по формуле (3)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,2,...).$$

По этой формуле при $n=0$ имеем

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$$

и при $n = 1,2,...$, интегрируя по частям, получаем

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos nx\,dx & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right| = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & \text{если n четное}\\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n}, & \text{если n нечетное}\end{cases}$$

Значит, $a_1=-\frac{4}{\pi}$, $a_3=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3^2}$, $a_5=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5^2}$, ...

Следовательно,

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right). \qquad (7)$$

3. Так как функция $|x|$ непрерывна на промежутке $[-\pi,\pi]$, то полученный ряд сходится к $|x|$ при всех значениях x из этого промежутка, а вне этого промежутка – к периодическому продолжению этой функции.

4. Изобразим на чертеже частичные суммы полученного ряда. Последовательное приближение функции f(x) последовательными частичными суммами показано на следующих рис.15.

Из (7) при x=0 получается интересный ряд:

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right),$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots .$$

Из этой формулы получаются некоторые другие. А именно, положим

$$\sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots,\ \sigma_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8};$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}\ldots=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right).$$

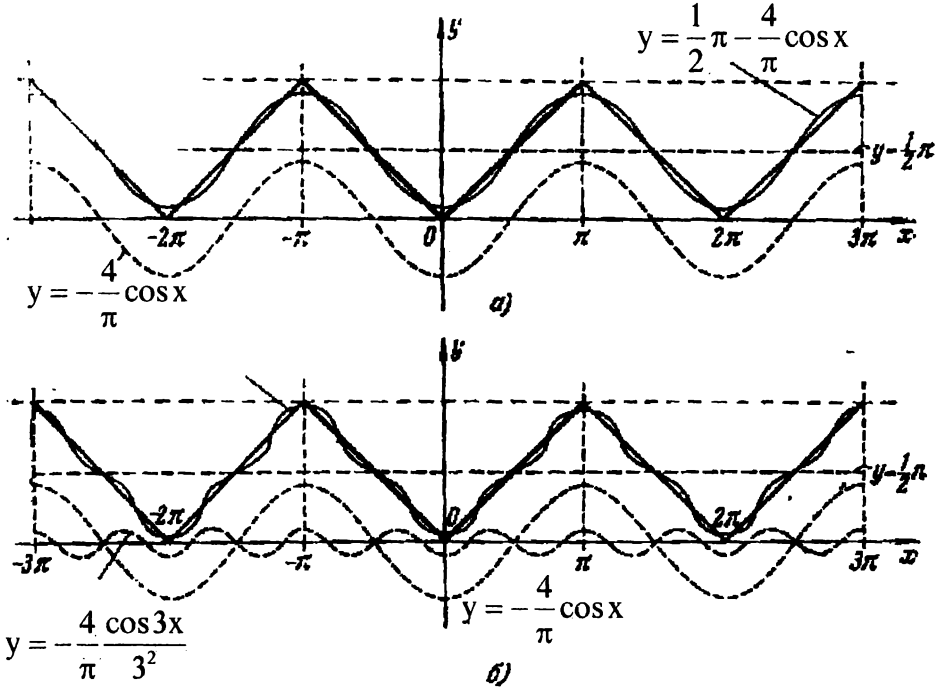


Рис. 15

Имеем

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2,\ \sigma_2 = \frac{1}{4}\sigma = \frac{1}{4}(\sigma_1+\sigma_2),$$

откуда

$$\sigma_2 = \frac{\pi^2}{24},$$

значит,

$$\sigma = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6},\ \text{т.е. } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

В главе 1 §3 мы обсуждали этот результат, принадлежащий Л.Эйлеру.

Замечание. Часто возникает задача о разложении в ряд по косинусам или в ряд по синусам функции f(x), заданной и абсолютно интегрируемой на промежутке $[0,\pi]$.

Для разложения f(x) в ряд по косинусам можно рассуждать следующим образом. Продолжим функцию f(x) четным образом с отрезка $[0,\pi]$ на промежуток $[-\pi,0]$ (рис.16).

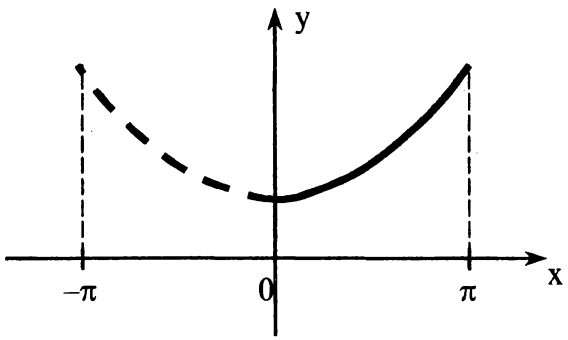


Рис. 16

Тогда для "продолженной" четной функции коэффициенты Фурье могут быть вычислены по формулам:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \ (n=0,1,2,\ldots),\ b_n=0 \ (n=1,2,\ldots).$$

В этих формулах фигурируют лишь заданные на $[0,\pi]$ значения f(x). Следовательно, при практических вычислениях фактически можно и не осуществлять указанное четное продолжение.

Если мы хотим разложить функцию f(x) в ряд по синусам, то продолжаем ее с отрезка $[0,\pi]$ на $[-\pi,0]$ нечетным образом (рис.17).

При этом (как мы обсуждали выше) следует принять f(0)=0. К "продолженной" нечетной функции опять применимы соображения, приведенные выше, и, следовательно, для коэффициентов Фурье справедливы формулы:

$$a_n=0 \ \ (n=0,1,2,\ldots),\ \ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \ (n=1,2,\ldots).$$

Так как здесь участвуют лишь значения функции f(x) на $[0,\pi]$, то фактическое продолжение f(x) с $[0,\pi]$ на $[-\pi,0]$ можно и не осуществлять.

Пример 3. Разложить в ряд по синусам функцию f(x), заданную на $(0,\pi)$.

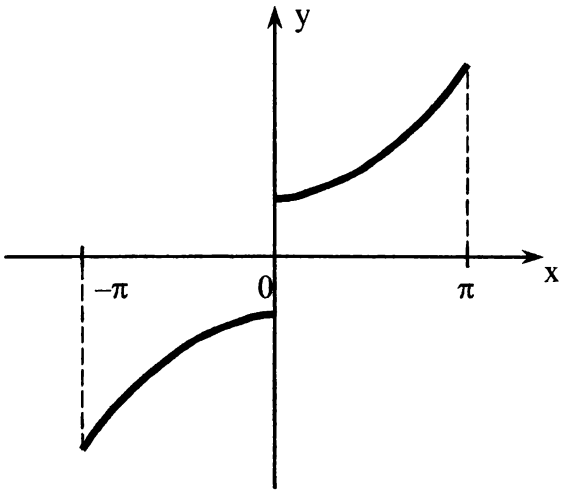


Рис. 17

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2} \quad (0<x<\pi).$$

Решение.

1. Продолжим данную функцию в соседний интервал $(-\pi,0)$ нечетным образом (рис.18).

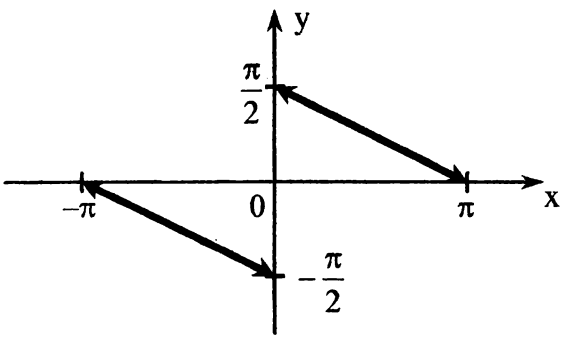


Рис. 18

Полученная таким образом функция (и ее 2π-периодическое

продолжение на всю числовую ось) удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому ее можно разложить в сходящийся ряд Фурье.

2. Вычислим коэффициенты Фурье:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=\dfrac{\pi-x}{2} & du=-\dfrac{1}{2}dx\\ dv=\sin nx\,dx & V=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{matrix}\right|=$$

$$\frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi-x)\cos nx}{2n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{2n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{1}{n}.$$

Тогда

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\quad(0<x<\pi).$$

§6. Разложение в ряд Фурье периодических функций с произвольным периодом

Рассмотрим теперь функции f(x), имеющие произвольный период $T=2\ell$. Разложение этих функций в ряд Фурье сводится к уже изученному случаю $\ell=\pi$ с помощью линейной замены:

$$x=\frac{\ell t}{\pi}\quad(-\pi\le t\le\pi).$$

При этом каждой функции f(x) периода 2ℓ соответствует функция $F(t)=f\left(\dfrac{\ell t}{\pi}\right)$ периода 2π, заданная на $[-\pi,\pi]$. Для F(t) составим ряд Фурье

$$F(T)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)\cos nt\,dt\quad(n=0,1,\ldots)$$

и

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)\sin nt\,dt\quad(n=1,2,\ldots).$$

Возвращаясь к прежней переменной, т.е. полагая $t=\frac{\pi x}{\ell}$, получим

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{\ell}+b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell}\right),\qquad(1)$$

где

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx\quad(n=0,1,2,\ldots)\\ b_n&=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx\quad(n=1,2,\ldots)\end{aligned}\right\}.\qquad(2)$$

Ряд (1) называется ***рядом Фурье для функции f(x) периода $T=2\ell$***, а коэффициенты (2) – ее *коэффициентами Фурье*.

Признаки сходимости Дирихле и Дини-Липшица справедливы и в данном случае, надо лишь требовать выполнение соответствующих условий на промежутке $[-\ell,\ell]$.

Можно было бы и прямо строить теорию для рядов вида (1), отправляясь от тригонометрической системы

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{\ell},\ \sin\frac{\pi x}{\ell},\ \ldots,\ \cos\frac{\pi nx}{\ell},\ \sin\frac{\pi nx}{\ell},\ \ldots,$$

которая, как показано в §2, ортогональна на промежутке $[-\ell,\ell]$ [см. формулы (13) и (14)].

В случае четной функции f(x) ряд Фурье (1) имеет вид:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{\ell},$$

где

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx\quad(n=0,1,2,\ldots)$$

а для нечетной функции

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell},$$

где

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx \quad (n=1,2,\ldots).$$

Замечание. Можно было бы строить теорию таких рядов, исходя из систем

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{\ell},\ \cos\frac{2\pi x}{\ell},\ \ldots,\ \cos\frac{\pi nx}{\ell},\ \ldots$$

и

$$\sin\frac{\pi x}{\ell},\ \sin\frac{2\pi x}{\ell},\ \ldots,\ \sin\frac{\pi nx}{\ell},\ \ldots,$$

соответственно [см. формулы (15) и (16) из §2].

Как и в §5, этим можно воспользоваться для разложения в ряд только по косинусам или синусам функции, заданной лишь на промежутке $[0,\ \ell]$ (с помощью четного или, соответственно, нечетного ее продолжения на промежуток $[-\ell,0]$).

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -2\le x\le 0\\ x \text{ при } 0\le x\le 2\end{cases}$$

с периодом T=4.

Решение.

1. Здесь T=4, $\ell=2$. Построим график данной функции и его периодическое продолжение на всю числовую ось (рис. 19).

Полученная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому ее можно разложить в сходящийся ряд Фурье.

2. Вычислим коэффициенты Фурье данной функции по формулам (2), в которых вместо ℓ надо подставить 2. Имеем:

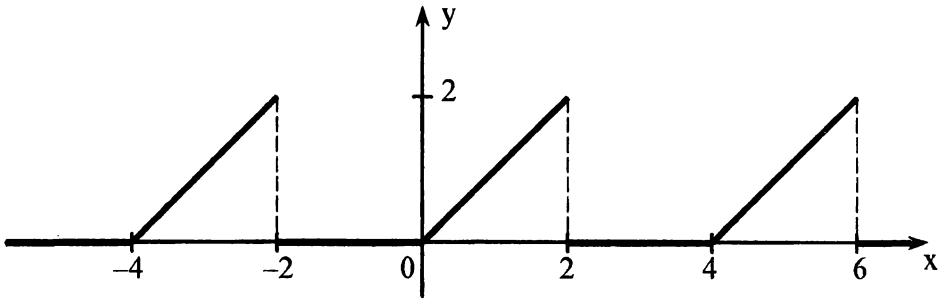


Рис. 19

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{2}xdx\right]=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}xdx=1;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}0\cdot\cos\frac{\pi nx}{2}\,dx+\int_{0}^{2}x\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos\frac{\pi nx}{2}dx & v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\pi n}x\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right]=\frac{1}{2}\frac{4}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{4}{\pi^2n^2}(\cos\pi n-1).$$

Итак,

$$a_n=\frac{2}{\pi^2n^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & \text{если } n \text{ четное}\\ -\dfrac{4}{\pi^2n^2}, & \text{если } n \text{ нечетное}\end{cases}$$

Далее получаем

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}0\cdot\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\int_{0}^{2}x\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right]=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin\frac{\pi nx}{2}dx & v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{\pi n}\int_0^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right]=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin\frac{\pi nx}{2}dx & v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{\pi n}\int_0^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{\pi n}2\cos\pi n+\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2\right].$$

Значит, $b_n=-\frac{2}{\pi n}(-1)^n$ $(n=1,2,..)$.

Получаем ряд Фурье данной функции:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{\pi nx}{2}}{n}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1^2}+\frac{\cos\frac{3\pi x}{2}}{3^2}+\frac{\cos\frac{5\pi x}{2}}{5^2}+\ldots\right]+$$

$$+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{1}-\frac{\sin\frac{2\pi x}{2}}{2}+\frac{\sin\frac{3\pi x}{2}}{3}-\frac{\sin\frac{4\pi x}{2}}{4}.+\ldots\right].$$

Это представление имеет место при $0 < x < 2$, в точке $x = 0$ ряд сходится к 0, а в точке $x = 2$ – к значению $1=\frac{f(2-0)+f(2+0)}{2}=\frac{2+0}{2}$.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } 0\le x\le \dfrac{\ell}{2} \\ \ell - x, \text{ если } \dfrac{\ell}{2}\le x\le \ell \end{cases}$$

Решение. График f(x) вместе с ее нечетным продолжением на промежутке $[-\ell,0]$ и последующим периодическим продолжением (с периодом $T=2\ell$) на всю ось имеет вид (рис. 20).

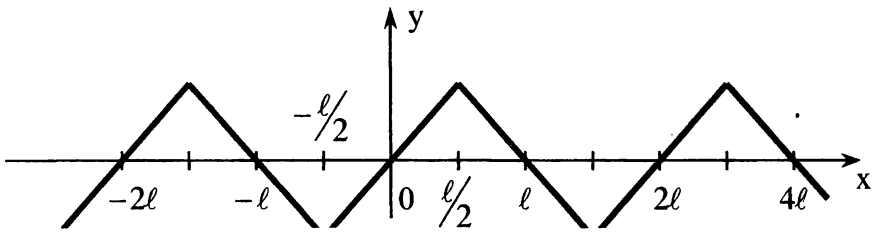


Рис. 20

Легко видеть, что полученная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому ее можно разложить в сходящийся ряд Фурье.

2. Вычислим коэффициенты Фурье:

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/2}\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx+\frac{2}{\ell}\int_{\ell/2}^{\ell}(\ell-x)\sin\frac{\pi n x}{\ell}dx \quad (n=1,2,\ldots).$$

Положим $t=\dfrac{\pi x}{\ell}$, тогда

$$b_n=\frac{2\ell}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} t\sin nt\,dt+\frac{2\ell}{\pi^2}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-t)\sin nt\,dt=\left|\begin{matrix} u=\pi-t & du=-dt \\ dv=\sin nt\,dt & v=-\dfrac{\cos nt}{n}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2\ell}{\pi^2}\left[-\frac{t\cos nt}{n}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{2\ell}{\pi^2 n}\int_0^{\pi/2}\cos nt\,dt\right]+$$

$$+\frac{2\ell}{\pi^2}\left[-\frac{(\pi-t)\cos nt}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi}-\frac{2\ell}{\pi^2 n}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nt\,dt\right]=\frac{4\ell}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Следовательно, в силу непрерывности функции f(x) получаем

$$\frac{4\ell}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{\ell}-\frac{\sin\frac{3\pi x}{\ell}}{3^2}+\frac{\sin\frac{5\pi x}{\ell}}{5^2}-\ldots\right)=\begin{cases}x \text{ при } 0\le x\le\dfrac{\ell}{2}\\ \ell-x \text{ при } \dfrac{\ell}{2}<x\le\ell\end{cases}.$$

Пример 3. Разложить функцию

$$f(x)=x(0\le x\le\ell)$$

в ряд по системам $\left\{\sin\frac{\pi nx}{\ell}\right\}$ (n=1,2,...) и $\left\{\cos\frac{\pi nx}{\ell}\right\}$ (n=0,1,2,).

Решение.

1. График f(x) вместе с ее нечетным продолжением на $[-\ell,0]$ и последующим периодическим продолжением ($T=2\ell$) на всю ось имеет вид (рис. 21).

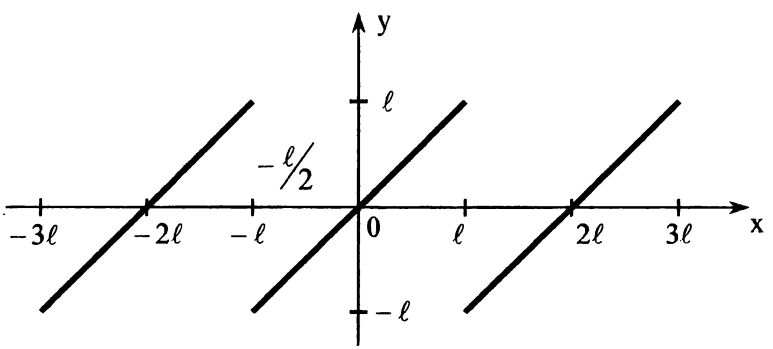


Рис. 21

Ясно, что условия Дирихле (и Дини-Липшица) выполняются, и потому ряд Фурье будет сходиться всюду.

Коэффициенты Фурье этой функции равны

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{2}{\ell}\left[\frac{\ell^2\sin\frac{n\pi x}{\ell}}{n^2\pi^2}\Big|_0^{\ell}-\frac{\ell x\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{n\pi}\Big|_0^{\ell}\right]=\frac{(-1)^{n+1}2\ell}{n\pi}.$$

Так как построенная функция непрерывна, то выполняется равенство

$$x=\frac{2\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi nx}{\ell}}{n}\quad(0\le x\le\ell). \tag{3}$$

2. График f(x) вместе с ее четным продолжением на $[-\ell,0]$ и последующим периодическим продолжением ($T=2\ell$) на всю ось имеет вид (рис. 22).

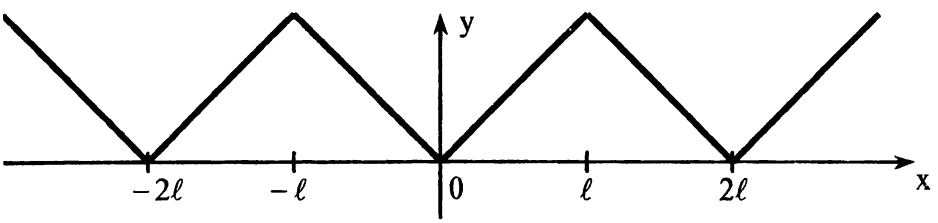


Рис. 22

Очевидно, условия Дирихле для данной функции выполняются и потому ряд Фурье будет сходиться всюду.

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\cdot\frac{\ell^2}{2}=\ell;$$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}x\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx & v=\frac{\ell}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{\ell}\end{matrix}\right|=$$

$$\frac{2}{\ell}\left\{\frac{\ell}{\pi n}x\sin\frac{\pi nx}{\ell}\Big|_0^{\ell}+\frac{\ell}{\pi n}\frac{\ell}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{\ell}\Big|_0^{\ell}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\ell}\frac{\ell^2}{\pi^2 n^2}[(-1)^n-1],$$

то есть

$$a_n=\begin{cases}0 \text{ при n четном}\\ -\dfrac{4\ell}{\pi^2}\dfrac{1}{n^2} \text{ при n нечетном}\end{cases}.$$

Следовательно, разложение имеет вид:

$$|x|=\frac{\ell}{2}+\frac{2\ell}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[(-1)^n-1]\cos\frac{\pi nx}{\ell}=\frac{\ell}{2}-\frac{4\ell}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{\ell}=$$

$$=\frac{\ell}{2}-\frac{4\ell}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{\ell}x}{1}+\frac{\cos\frac{3\pi}{\ell}x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos\frac{(2k-1)\pi x}{\ell}}{(2k-1)^2}+\ldots\right].$$

Так как функция f(x) непрерывна на всей числовой оси, то ряд Фурье сходится к ней при всех x по теореме Дирихле.

Замечания:

1. Пример 2 из §5 является частным случаем последней формулы при $\ell=\pi$.

2. Разложение по системе $\left\{\sin\frac{\pi nx}{\ell}\right\}$ является разложением данной функции в ряд Фурье по синусам, а разложение по системе $\left\{\cos\frac{\pi nx}{\ell}\right\}$ – по косинусам.

§7. Комплексная форма ряда Фурье

Пусть функция f(x) интергрируема на промежутке $[-\pi,\pi]$. Построим для нее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \,(n = 0,1,2...) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \,(n = 1,2...) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Воспользуемся тождеством Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Значит,

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2},$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = i\frac{-e^{inx} + e^{-inx}}{2}.$$

Подстановка в (1) дает

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right) \tag{3}$$

Если положить

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}(n = 1,2...), \tag{4}$$

то m-я частичная сумма $s_m(x)$ ряда (3) может быть записана в виде

$$s_m(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{m}(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{imx} . \qquad (5)$$

Поэтому из (3)–(5) следует

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} . \qquad (6)$$

Ряд, стоящий справа, называется **комплексной формой ряда Фурье для функции f(x)**. Сходимость ряда (6) нужно понимать как существование предела при $m \to \infty$ симметричных сумм (5).

Коэффициенты $c_n (n = 0, \pm1, \pm2, ...)$, дающиеся формулами (4), называются **комплексными коэффициентами Фурье функции f(x)**. Покажем, что для них справедливы формулы

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx (n = 0, \pm1, \pm2, ...) . \qquad (7)$$

Действительно, в силу формулы Эйлера и соотношений (4) получаем для положительных индексов n:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = c_n,$$

а для отрицательных индексов

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = c_{-n},$$

что и доказывает формулу (7).

Отметим, что для действительной функции f(x) коэффициента Фурье c_n и c_{-n} являются взаимно сопряженными комплексными числами: $c_{-n} = \overline{c}_n$.

Пример 1. Разложить функцию $f(x) = e^x (-\pi < x < \pi)$ в комплексный ряд Фурье.

Решение. Построим график функции (рис. 23).

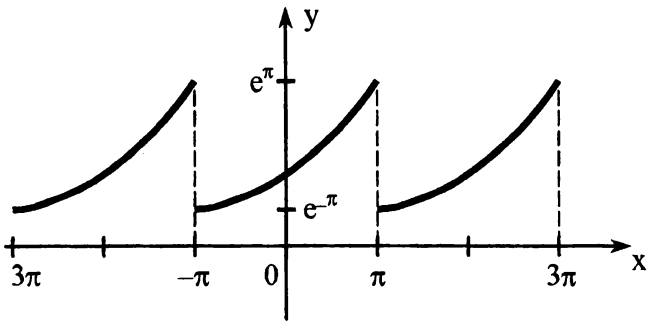


Рис. 23

Функция e^x удовлетворяет условиям Дирихле, поэтому ее ряд Фурье (комплексный) сходится во всех точках.

Вычислим комплексные коэффициенты Фурье по формулам (7)

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-in)}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{x(1-in)}}{1-in}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}(e^{\pi}e^{-in\pi} - e^{-\pi}e^{in\pi}) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\frac{1}{1-in}(e^{\pi} - e^{-\pi}),$$

так как $e^{\pm in\pi} = \cos n\pi = (-1)^n$.

Следовательно,

$$e^x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{inx}}{1-in}(-\pi < x < \pi).$$

Комплексную форму ряда Фурье можно записать и для любого интервала $(-l; l)$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\alpha_n x},\ c_n = \frac{1}{2e}\int_{-l}^{l} f(x)e^{i\alpha_n x}dx (n = 0,\pm1,\pm2,...). \qquad (8)$$

Числа $\alpha_n = \frac{\pi n}{l}(n = 0,\pm1,\pm2,...)$ называются волновыми числами функции f(x), а выражение $e^{i\alpha_n x}$ – гармониками. Совокупность волновых

чисел именуется спектром (дискретным). Коэффициенты Фурье c_n называются комплексной амплитудой.

Отметим, что признаки сходимости ряда Фурье (Дирихле и Дини-Липшица) сохраняются и для комплексного ряда Фурье.

Пример 2. Разложить в комплексный ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } -2\le x<0\\ -x, \text{ если } 0\le x\le 2\end{cases} \qquad T=4$$

Решение. График функции f(x) с ее периодическим продолжением имеет вид (рис. 24).

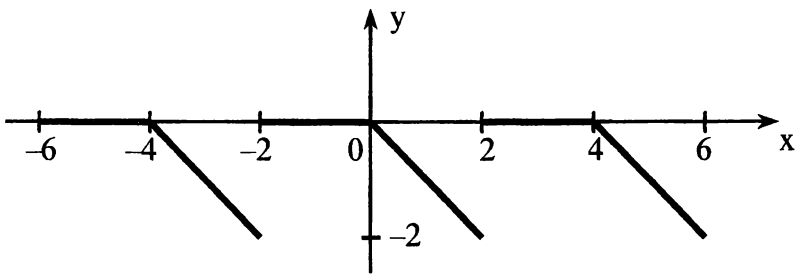


Рис. 24

Ясно, что выполняются условия Дирихле (и Дини-Липшица), поэтому данную функцию можно разложить в комплексный ряд Фурье.

Вычислим комплексные коэффициенты Фурье по формулам (8):

$$c_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{0}^{2}(-x)dx=-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=-\frac{1}{2};$$

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{\pi nx}{l}}dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)e^{-i\frac{\pi nx}{2}}dx=-\frac{1}{4}\int_{0}^{2}xe^{-i\frac{\pi nx}{2}}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=e^{-\frac{i\pi nx}{2}} & v=-\frac{2}{i\pi n}e^{-\frac{i\pi nx}{2}}\end{matrix}\right|=-\frac{1}{4}\left\{-\frac{2}{i\pi n}xe^{-\frac{i\pi nx}{2}}\Big|_0^2+\frac{2}{i\pi n}\int_0^2 e^{-\frac{i\pi nx}{2}}dx\right\}=$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{\frac{4i}{\pi n}e^{-i\pi n} - \frac{2}{i\pi n}\cdot\frac{2}{i\pi n}e^{-\frac{i\pi n x}{2}}\Big|_0^2\right\} = -\frac{1}{4}\left\{\frac{4i}{\pi n}(-1)^n + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[e^{-i\pi n} - 1\right]\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{\frac{4i}{\pi n}(-1)^n + \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\right\} = \frac{(-1)^{n+1}\cdot i}{\pi n} + \frac{1}{\pi^2 n^2}\left[1 - (-1)^n\right] =$$

$$\begin{cases} -\dfrac{i}{\pi n}, & \text{если n четное} \\ \dfrac{i}{\pi n} - \dfrac{2}{\pi^2 n^2}, & \text{если n нечетное} \end{cases}.$$

Итак, комплексный ряд Фурье данной функции имеет вид

$$-\frac{1}{4} + \left(\frac{i}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\right)e^{i\frac{\pi x}{2}} - \frac{i}{2\pi}e^{i\pi x} + \left(\frac{i}{3\pi} - \frac{2}{\pi^2 9}\right)e^{i\frac{3\pi x}{2}} + \ldots.$$

Этот ряд сходится к порождающей его функции при $-2 < x < 2$, а в крайних точках – к значению $\frac{0+(-1)}{2} = -\frac{1}{2}$.

§8. Экстремальное свойство частных сумм ряда Фурье

Введем понятие среднего квадратичного отклонения двух функций. Пусть f(x) – функция, заданная на промежутке [a, b]. Будем говорить, что функция f(x) интегрируема с квадратом (квадратично интегрируема), если она сама и ее квадрат интегрируемы на [a, b].

Всякая ограниченная интегрируемая функция обязательно есть функция, интегрируемая с квадратом.

Это не всегда так для неограниченных функций. Действительно, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, но интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ уже расходится.

Пусть f(x) и g(x) – две функции, заданные и квадратично интегрируемые на [a, b].

Средним квадратическим отклонением этих функций на отрезке [a, b] называется число ρ(f, g), равное

$$\rho(f,g)=\left\{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

Величина ρ(f, g) обладает многими свойствами расстояния между точками пространства.

Отметим, прежде всего, следующее очевидное равенство ρ(g, f) = ρ(f, g).

Далее, если функции f(x) и g(x) непрерывны на [a, b], то соотношение ρ(g,f)=0 выполняется тогда и только тогда, когда f(x) и g(x) совпадают на [a, b].

Наконец, для любых трех функций f(x), g(x), h(x) выполняется неравенство $\rho(f,h)\le\rho(f,g)+\rho(g,h)$.

Оно называется неравенством треугольника, так как аналогично неравенству AC ≤ AB + BC для трех сторон треугольника. С помощью ρ(f, g) можно измерять расстояние между функциями f(x) и g(x) по формуле (1).

Поставим следующую задачу: на промежутке [a, b] заданы квадратично интегрируемая функция f(x) и ортогональная система функций $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),...\varphi_n(x),....$ Найти линейную комбинацию функций $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),...\varphi_n(x),...$ [т.е. обобщенный многочлен $a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+...+a_n\varphi_n(x)$], имеющую наименьшее среднее квадратическое отклонение от функции f(x) на промежутке [a, b].

Обозначим $P_n(x)=\sum_{n=0}^{n}a_k\varphi_k(x)$ и $\delta_n^2=\int_a^b[f(x)-P_n(x)]^2dx$.

Имеем

$$\delta_n^2=\int_a^b f^2(x)dx-2\int_a^b f(x)P_n(x)dx+\int_a^b P_n^2(x)dx. \qquad (2)$$

Очевидно

$$\int_a^b f(x)P_n(x)dx=\sum_{n=0}^{n}a_k\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx.$$

Но

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = c_k \| \varphi_k \|^2 \ (k = 0,1,2,...),$$

где $c_к$ – коэффициенты Фурье функции f(x) по ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}(n = 0,1,...)$. Поэтому

$$\int_a^b f(x)P_n(x)dx = \sum_{n=0}^{n} a_k c_k \| \varphi_k \|^2 . \qquad (3)$$

В силу ортогональности рассматриваемой системы имеем

$$\int_a^b P_n^2(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)\right]^2 = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\varphi_k^2(x) + 2\sum_{l\neq m} a_l a_m \varphi_l(x)\varphi_m(x)\right)dx =$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x)dx + 2\sum_{e\neq m} a_l a_m \int_a^b \varphi_l(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x)dx .$$

Итак,

$$\int_a^b P_n^2(x)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \| \varphi_k \|^2 . \qquad (4)$$

Из соотношений (2) – (4) вытекает

$$\delta_n^2 = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^{n} a_k c_k \| \varphi_k \|^2 + \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \| \varphi_k \|^2 =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx + \sum_{k=0}^{n} (a_k - c_k)^2 \| \varphi_k \|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \| \varphi_k \|^2 .$$

Величина δ_n^2 будет минимальной, если $\sum_{k=0}^{n} (a_k - c_k)^2 \| \varphi_k \|^2 = 0$,

что равносильно соотношениям $a_k = c_k (k = 0, 1, ..., n)$.

Итак, утверждение доказано.

Среднее квадратичное отклонение будет минимальным, если коэффициенты многочлена $P_n(x)$ являются коэффициентами Фурье и, следовательно, минимальный многочлен $P_n(x)$ совпадает с **частной**

суммой $S_n(x)=\sum_{n=0}^{n}c_k\varphi_k(x)$ **ряда Фурье** функции f(x) по системе $\{\varphi_n(x)\}$ (n = 0, 1, ...):

$$\min_{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n}\int_a^b[f(x)-\sum_{n=0}^{n}a_k\varphi_k(x)]^2dx=\int_a^b[f(x)-\sum_{n=0}^{n}c_k\varphi_k(x)]^2dx= \tag{5}$$

$$=\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{n=0}^{n}c_k^2\,\|\varphi_k\|^2\,.$$

Это выражение показывает, что с ростом n частичные суммы ряда Фурье дают более точное (в смысле среднего квадратического отклонения) приближенное представление функции f(x) (**экстремальное свойство частных сумм ряда Фурье по однонормированной системе**).

Следствие (неравенство Бесселя). Для коэффициентов Фурье любой квадратично интегрируемой функции f(x) справедлива оценка

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_k^2\,\|\varphi_k\|^2\le\int_a^b f^2(x)dx\,. \tag{6}$$

Действительно, из соотношения (5) следует

$$\sum_{n=0}^{n}c_k^2\,\|\varphi_k\|^2\le\int_a^b f^2(x)dx\,,$$

где n – произвольное натуральное число. Поэтому частные суммы ряда (6) ограничены и монотонно возрастают. Значит, можно перейти к пределу при $n\to\infty$ и получить неравенство (6).

Ортогональная система функций $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots(x\in[a,b])$ называется **замкнутой** (по В.А. Стеклову), если для любой функции с интегрируемым квадратом имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2\,\|\varphi_k\|^2=\int_a^b f^2(x)dx\,, \tag{7}$$

а это соотношение называется **равенством Парсеваля-Стеклова**.

Особенно просто выглядят последние соотношения в случае ортонормированных систем.

Так, неравенство Бесселя имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \le \int_a^b f^2(x)dx$, а равенство Парсеваля-Стеклова вид $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b f^2(x)dx$.

Все рассмотренные выше ортогональные системы тригонометрических функций были замкнутыми. В частности, замкнута система функций

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}, \ldots (-l \le x \le l).$$

Равенство Парсеваля-Стеклова для нее имеет вид (см. [7] и вычисление нормы тригонометрических функций в §2)

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Это равенство было впервые получено французским математиком Парсевалем в 1805 г.

Для четных функций имеем

$$\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

а для нечетных

$$\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2. \qquad (8)$$

Пример. В примере 3 §6 было показано, что разложение функции $f(x) = x (0 \le x \le l)$ в ряд Фурье по тригонометрической системе $\sin\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots$ имеет вид

$$f(x)=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{l}\ (0\le x\le l).$$

Отметим, что функцию f(x) мы должны нечетным образом продолжить на промежуток $[-l, 0]$. Так как

$$\frac{2}{l}\int_0^l x^2dx=\frac{2l^2}{3},$$

то равенство Парсеваля-Стеклова (8) для нечетной функции записывается в виде $\frac{2l^2}{3}=\frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Отсюда вытекает еще одно доказательство формулы Эйлера

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Замечание. Ряды Фурье играют важную роль при решении ряда задач математической физики.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Для преодоления трудностей, связанных с интегрированием, И. Ньютон и Г.В. Лейбниц выражали подынтегральную функцию в виде многочлена с бесконечным числом слагаемых. Применяя к таким выражениям обычные правила алгебры, математики XVIII столетия сделали много замечательных открытий.

Однако обнаружилось, что если безоговорочно применять правила алгебры к бесконечным суммам, то можно прийти к ошибкам.

Так, профессор философии и математики Пизанского университета Г. Гранди (1671-1742) в 1703 г. указал, что из разложения путем деления $\frac{1}{1+x}$ в ряд $1-x+x^2-x^3+\ldots$ при подстановке x = 1 возникает равенство $\frac{1}{2}=1-1+1-1+\ldots$. Группируя члены справа попарно, он пришел к равенству $0+0+0+\ldots=\frac{1}{2}$ и истолковал его как символ творения мира из ничего.

Оживленная дискуссия, которая возникла вокруг этого факта,

способствовала выработке понятия сходящихся и расходящихся рядов.

Надо сказать, что ряды возникали в математике и раньше. Французский ученый Н. Орем (ок. 1323-1382) доказал расходимость гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$. Независимо от Орема и другим способом этот факт также доказал П. Менголи в 1650 г.

Последователь Орема португалец А. Томас, преподававший в первой четверти XVII в. в Сорбонне, формулирует общее правило суммирования ряда $1+2x+3x^2+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}$, где $|x| < 1$. Доказательство его (чисто словесное) основано на знании суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Логарифмический ряд $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ был опубликован немецким математиком Н.Меркатором (1620-1687) в 1668 г., но вопрос о сходимости не был затронут. Этот же результат в 1665 г. был независимо получен Ньютоном, но не опубликован.

В 1668 г. английский математик Дж. Грегори (1638-1675) дал строгий вывод ряда Меркатора и получил разложение $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)$, пригодное для вычисления логарифма любого положительного числа.

Ряд для арктангенса $\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ был открыт индийскими математиками в XVI в., затем он был вновь найден Дж. Грегори в 1671 г. и Лейбницем в 1673 г. Лейбниц положил в нем x = 1 и получил формулу $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$, которую назвал "арифметической квадратурой круга".

И.Ньютон широко пользовался биномиальным рядом для дробных и отрицательных показателей [при целых положительных показателях эта формула бинома была известна ранее французскому математику Б.Паскалю (1629-1662)].

Ряд Тейлора был введен английским математиком Б. Тейлором (1685-1731) в 1715 г. нестрогим способом. Через 30 лет английский математик К. Маклорен (1698-1746) дал простой вывод формулы Тейлора методом неопределенных коэффициентов.

Математики XVIII в. разлагали в ряд Тейлора функции и не сомневались, что всякая непрерывная функция разлагается в ряд Тейлора.

В 1799 г. французский математик Ж. Лагранж (1736-1813) вывел формулу для остатка ряда Тейлора, при этом он предполагал разложение функции в ряд Тейлора.

Четверть века спустя французский математик О. Коши (1789-1857) дал другую форму остатка ряда Тейлора и привел доказательство теоремы о сходимости ряда Тейлора к порождающей его функции. О. Коши указал первый пример функции, которая хотя и обладает в точке x=0 всеми производными, но не разлагается в ряд Маклорена (см. пример в §3 гл. II).

Тригонометрические ряды были введены швейцарским математиком Д. Бернулли (1700-1782) в связи с изучением колебаний струны.

Возникший при этом вопрос о возможности представления данной функции в тригонометрический ряд привел к дискуссиям между Л.Эйлером, Ж.Даламбером и Ж.Лагранжем о понятии функции.

Формулы, выражающие коэффициенты Фурье через данную функцию, были получены Л.Эйлером в 1777 г. Строгий их вывод и приложения были даны французским математиком Ж.Фурье (1768-1830) в 1822 г. в книге "Аналитическая теория тепла", привлекшей внимание математиков к рядам Фурье.

Развивая идеи Ж. Фурье, немецкий математик Л. Дирихле (1805-1859) в 1829 г. установил и строго доказал достаточный признак разложимости в тригонометрический ряд Фурье.

Впоследствии были установлены и другие достаточные условия разложимости в ряд Фурье и исследованы функции, не удовлетворяющие упомянутым условиям.

ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ

ПРИМЕРЫ ОТРАБОТКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Числовые ряды

Данной теме посвящена глава 1 тематического обзора, где изложен теоретический материал и решены задачи и примеры. Поэтому перед решением примеров следует прочесть материал главы 1.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n+1}{9n-4}$.

Решение. Найдем предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n+1}{9n-4} = \frac{8}{9} \neq 0$. Так как не выполнено необходимое условие сходимости, то данный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots.$$

Решение. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=0$. Применим признак сравнения. Сравним данный ряд с геометрическим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится, так как $q=\frac{1}{2}<1$. Имеем $\frac{1}{n2^n}\le\frac{1}{2^n}$ (n = 1, 2, ...). Мажорирующий ряд сходится. Поэтому сходится и данный ряд.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\sqrt{n}}$.

Решение. Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, который

является обобщенным гармоническим рядом с показателем $p=\frac{3}{2}>1$ и потому сходится. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(3n+1)\sqrt{n}}:\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(3n+1)\sqrt{n}}=\frac{1}{3}\neq 0.$$

Получим конечный и отличный от нуля предел. В силу предельного признака сравнения ряды ведут себя одинаково. Значит, данный ряд сходится.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3\sqrt{n}}$.

Решение. Используем эквивалентность бесконечно малых $\sin x\sim x(x\to 0)$, откуда $\sin\frac{\pi}{3\sqrt{n}}\sim\frac{\pi}{3\sqrt{n}}(n\to\infty)$. Следовательно, данный ряд ведет себя одинаково с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3\sqrt{n}}$ в силу предельного признака сравнения. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3\sqrt{n}}=\frac{\pi}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходящийся, так как он является обобщенным гармоническим рядом с показателем $p=\frac{1}{2}<1$. Следовательно, данный ряд расходится.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots.$$

Решение. Так как общий член ряда содержит показательную функцию 3^n, то применим признак Даламбера. Имеем $a_n=\frac{n+1}{3^n}$,

$a_{n+1} = \frac{n+2}{3^{n+1}}$. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{3^{n+1}} : \frac{n+1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1.$$

В силу признака Даламбера данный ряд сходится.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Решение. Применим признак Даламбера, так как общий член ряда содержит факториалы. Имеем $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, $a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}$. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} : \frac{(2n)!}{(n!)^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\cdot\frac{((n)!)^2}{[(n+1)!]^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4 > 1.$$

В силу признака Даламбера ряд расходится.

Пример 7. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$.

Решение. Общий член ряда имеет вид $a_n = [f(n)]^n$, поэтому применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2}.$$

Здесь мы использовали второй замечательный предел $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

Так как $\frac{e}{2} > 1$, то данный ряд расходится.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Решение. Заменим n переменной x, получим непрерывную, положительную и монотонно убывающую порождающую функцию $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$. Воспользуемся интегральным признаком Коши-Маклорена:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{A}\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln A}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, следовательно, исследуемый ряд сходится.

Пример 9. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{\ln(n+2)}$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов ряда: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$. Из неравенства $\ln(n+2)<n+2$ следует, что $\frac{1}{\ln(n+2)}>\frac{1}{n+2}$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ расходится (гармонический ряд). Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$ расходится в силу признака сравнения. Значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Выясним его условную сходимость. Так как $\cos\pi n=(-1)^n$ $n=0,1,2,...)$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ является знакочередующимся,

поэтому применим признак Лейбница:

$$\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \ldots > \frac{1}{\ln(n+2)} > \frac{1}{\ln(n+3)} > \ldots; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+2)} = 0.$$

Таким образом, все условия признака Лейбница выполняются, исходный ряд сходится условно.

Пример 10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}$.

Решение. Так как о величине α не сделано никаких предположений, то она может принимать любые значения и поэтому члены ряда могут иметь произвольные знаки, причем ряд не обязательно является знакочередующимся.

Вопрос о сходимости ряда решим на основании признака абсолютной сходимости. Составим ряд из абсолютных величин членов заданного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^{\frac{3}{2}}}$ и сравним его с обобщенным гармоническим рядом с показателем $p = \frac{3}{2} > 1$ и, значит, сходящимся. Так как $|\sin n\alpha| \le 1$, то мажорантным рядом и является $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Итак, исследуемый ряд сходится абсолютно.

Степенные ряды

Данной теме посвящена глава 2 тематического обзора, где изложен теоретический материал и решены задачи и примеры. Поэтому перед решением следующих примеров следует прочесть материал этой главы.

Пример 11. Найти интервал сходимости степенного ряда, исследовать поведение ряда на границах интервала сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(3n+2)\cdot 5^n}$.

Решение. К ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x+1|^n}{(3n+2)\cdot 5^n}$ применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x+1|^{n+1}}{(3n+5)\cdot 5^{n+1}}:\frac{|x+1|^n}{(3n+2)\cdot 5^n}\right)=|x+1|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+5}\cdot\frac{5^n}{5^{n+1}}\right)=\frac{|x+1|}{5}<1.$$

Таким образом, $\frac{|x+1|}{5}<1\Leftrightarrow|x+1|<5\Leftrightarrow -6<x<4$, значит, степенной ряд абсолютно сходится при $-6 < x < 4$, радиус сходимости $R = 5$.

Рассмотрим границы интервала. При подстановке $x = -6$ в степенной ряд получим $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^n}{(3n+2)\cdot 5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}$. Для данного знакочередующегося ряда проверим условия признака Лейбница. Имеем $\frac{1}{2}>\frac{1}{5}>\ldots>\frac{1}{3n+2}>\frac{1}{3n+5}>\ldots$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+2}=0$. Следовательно, ряд сходится при $x = -6$.

При подстановке $x = 4$ получим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{(3n+2)\cdot 5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+2}$. Сравним этот ряд с гармоническим (расходящимся) рядом

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n+2}:\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

В силу предельного сравнения отсюда вытекает расходимость исходного степенного ряда в точке $x = 4$.

Итак, окончательно: область сходимости ряда $[-6; 4)$.

Пример 12. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\cos^2 x$.

Решение. Известно, что $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. Разложение в ряд Маклорена функции $\cos x$ имеет вид

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\ (-\infty<x<\infty).$$

Разложение в ряд Маклорена функции $\cos 2x$ получается отсюда заменой x на 2x:

$$\cos^2 x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty).$$

Тогда

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}[1 + (1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots)] \quad (-\infty < x < \infty).$$

Итак,

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty).$$

Пример 13. Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ функции $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$ и указать область сходимости полученного ряда.

Решение. Сделаем подстановку x – 1 = t, т.е. x = t + 1; получим функцию $y = \cos\frac{\pi}{2}(t+1) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t) = -\sin\frac{\pi}{2}t$, для которой разложение в ряд Маклорена (если $x_0 = 1$, то $t_0 = 0$) имеет вид

$$-\sin\frac{\pi}{2}t = -\left\{\frac{\pi}{2}t - \frac{1}{3!}(\frac{\pi}{2}t)^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\pi}{2}t)^5 - \frac{1}{7!}(\frac{\pi}{2}t)^7 + \ldots + (\right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}(\frac{\pi}{2}t)^{2n-1} + \ldots\right\} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}(\frac{\pi}{2})^{2n-1} t^{2n-1} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Возвращаясь к переменной x, получаем разложение

$$\cos\frac{\pi}{2}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!}(\frac{\pi}{2})^{2n-1}(x-1)^{2n-1} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Пример 14. Вычислить $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ с точностью до 0,001.

Решение. В разложении

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$$

надо взять $x = -\frac{1}{4}$, так как $e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$. Получим знакочередующийся ряд

$$e^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2!}\cdot(\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{3!}\cdot(\frac{1}{4})^3 + \frac{1}{4!}\cdot(\frac{1}{4})^4 - \frac{1}{5!}\cdot(\frac{1}{4})^5 + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\cdot(\frac{1}{4})^n + \ldots .$$

Если для вычисления $e^{-\frac{1}{4}}$ взять n первых членов, то, учитывая, что ряд знакочередующийся, погрешность от отбрасывания остальных членов будет меньше абсолютной величины первого отброшенного, т.е.

$$R_n \le \frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{4})^{n+1}.$$

Если сохранить три первых члена, то погрешность при отбрасывании всех остальных членов будет меньше $\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{4}\right)^4 < 0{,}00016$. Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

Вычисления надо проводить с точностью до четырех знаков. Получим $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0{,}779$.

Пример 15. Вычислить приближенно с точностью до 0,0001 интеграл $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$.

Решение. "Точное" интегрирование с помощью формулы Ньютона-Лейбница здесь невозможно, так как интеграл "неберущийся", т.е. не

является элементарной функцией. Используем разложение для e^{-x}, заменяя в нем x на –x:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty).$$

Умножая полученный ряд на $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x}e^{-x} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$$

и почленно интегрируя в интервале (0, 1), принадлежащем области сходимости ряда, получим

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx - \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx + \ldots + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n!}dx + \ldots =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+\frac{3}{2}} \frac{x^{n+\frac{3}{2}}}{n!}\Big|_0^1 + \ldots == \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n+3)n!} + \ldots$$

Для получения нужной точности необходимо взять

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9 \cdot 3!} + \frac{2}{11 \cdot 4!} - \frac{2}{13 \cdot 5!} + \frac{2}{15 \cdot 6!},$$

так как $\frac{2}{17 \cdot 7!} < 0{,}00002$. Итак,

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx \approx 0{,}37897 \approx 0{,}3790.$$

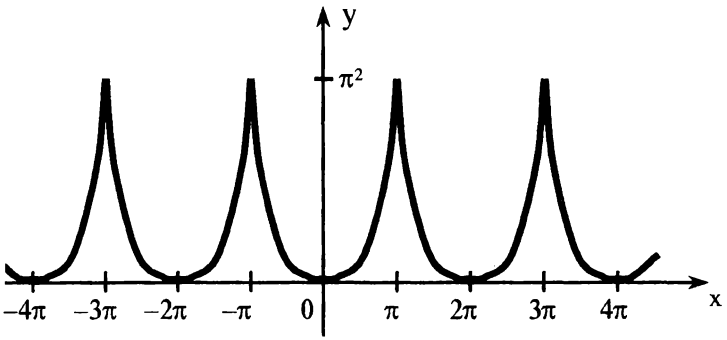
Ряды Фурье

Данной теме посвящена глава 3, поэтому перед решением следующих примеров следует просмотреть материал главы и разобрать приведенные в ней примеры.

Пример 16. Разложить функцию $f(x)=x^2$ в ряд Фурье: а) в интервале $(-\pi, \pi)$; б) в интервале $(0, 2\pi)$; в) в интервале $(0, \pi)$ в ряд синусов.

Решение.

а) График функции с 2π-периодическим продолжением имеет вид



Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и потому ее можно разложить в ряд Фурье.

Вычислим коэффициенты Фурье. Так как функция четная, то $b_n=0$ $(n = 0, 1, 2,...)$ и $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx$ $(n = 0, 1, 2,...)$.

Для вычисления этого интеграла применяют формулу интегрирования по частям в определенном интеграле. Получаем

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2x}{n}\sin nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{n}\left[-\frac{2}{n^3}\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2x}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{n^2}(\cos n\pi) = \frac{(-1)^n\cdot 4}{n^2} \quad (n = 1,2,...)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

Ряд Фурье данной функции имеет вид

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx .$$

В силу признака Дирихле данный ряд представляет функцию x^2 в интервале $(-\pi,\pi)$.

б) Интервал $(0, 2\pi)$ не симметричен относительно начала координат, а длина его $2l = 2\pi$. Вычисляем коэффициенты Фурье по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{8}{3}\pi^2,$$

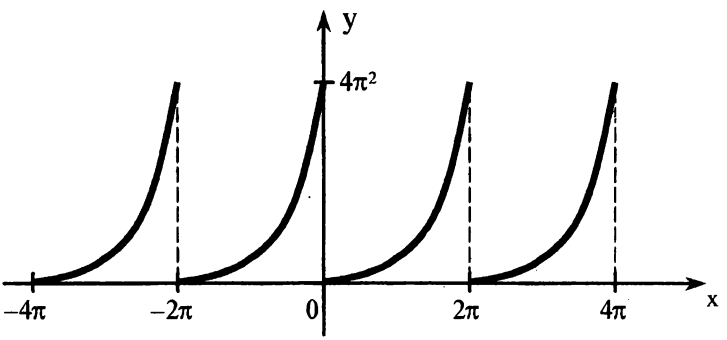
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2} \quad (n = 1,2,...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n} \quad (n = 1,2,...).$$

Поэтому ряд Фурье имеет вид

$$\frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right).$$

В силу теоремы Дирихле ряд сходится к порождающей функции в точках $x \in (0,2\pi)$, а в точках 0 и 2π к значению $\frac{4\pi^2 + 0}{2} = 2\pi^2$. График суммы ряда имеет вид



в) Функция, разлагаемая в ряд по синусам, должна быть нечетной. Следовательно, доопределим заданную функцию x^2 в $(-\pi, 0)$ нечетным образом, т.е. рассматриваем функцию $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } -\pi < x < 0 \\ x^2, & \text{если } 0 < x < \pi \end{cases}$.

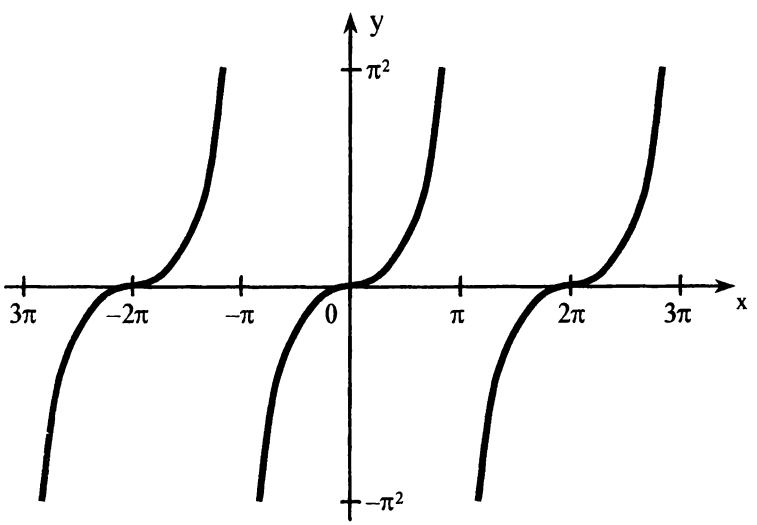
Для этой функции f(x) имеем $a_n = 0$ (n = 0, 1, 2,...) и

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\,dx = \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1] - \frac{2\pi}{n}(-1)^n.$$

Искомое разложение имеет вид

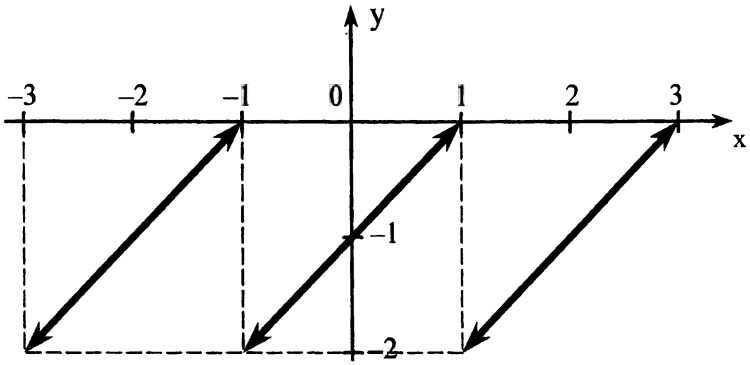
$$f(x) = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} - 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}.$$

График суммы ряда имеет вид



Отметим, что в точках $x = \pm\pi$ ряд Фурье сходится к нулю.

Пример 17. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически:



Решение. Получим явное выражение для f(x). График функции – прямая линия, используем уравнение прямой в виде $y - y_0 = k(x - x_0)$. Как видно из чертежа, $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$, т.е. f(x) = x – 1 (–1 < x < 1) и период T = 2.

Эта функция удовлетворяет условиям признака Дирихле, поэтому она разлагается в ряд Фурье. Вычислим коэффициенты Фурье (l = 1):

$$a_0 = \int_{-1}^{1}(x-1)dx = \left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_{-1}^{1} = -2;$$

$$a_n = \int_{-1}^{1}(x-1)\cos\pi nx\,dx = \left.\frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\sin n\pi x}{n\pi}dx - \left.\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right|_{-1}^{1} = 0$$

(n = 1, 2,...);

$$b_n = \int_{-1}^{1}(x-1)\sin\pi nx\,dx = -\left.\frac{x\cos\pi nx}{n\pi}\right|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\cos\pi nx}{n\pi}dx + \left.\frac{\cos\pi nx}{n\pi}\right|_{-1}^{1} = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}.$$

Ряд Фурье для функции f(x) имеет вид

$$-1 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} - \frac{\sin 4\pi x}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\sin\pi nx}{n} + \ldots\right]$$

Он представляет функцию f(x) при –1 < x < 1, а в точках x_0 = –1 и x_0 = 1 ряд сходится к –1.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.

2. Решите самостоятельно следующие задачи:

ВАРИАНТ 1

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+3)}.$$

2. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n-1)^2}.$$

3. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{8n^3+1}.$$

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\text{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln^3 n};\ \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{n^6+1}}.$$

5. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n\sqrt{n}}.$$

6. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(2n-1)^3}.$$

7. Разложить функцию f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$

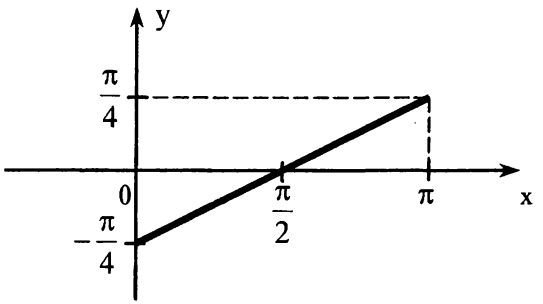
$$f(x)=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}.$$

8. Вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\sqrt{x}\,dx\,.$$

9. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию f(x), заданную на промежутке (-2, 2) выражением $f(x) = x^2$, $T = 4$.

10. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию, заданную графически



ВАРИАНТ 2

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}.$$

2. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n}.$$

3. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{n^3+1}\right)^n.$$

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\ln^3 n}$.

5. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n-1)\sqrt{2n+1}}.$$

6. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n x^{2n}.$$

7. Разложить функцию f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}.$$

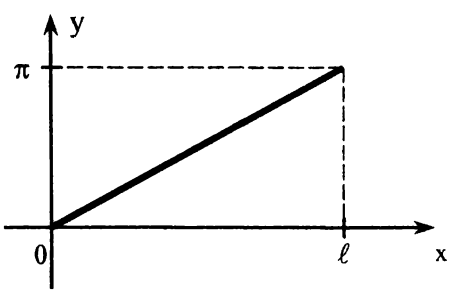
8. Вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{\cos x}{x}dx.$$

9. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию f(x), заданную на промежутке $(-\pi, \pi)$ выражением

$$f(x)=\begin{cases}2x & -\pi < x < 0\\ 3x & 0 < x < \pi\end{cases}, T = 2\pi.$$

10. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию, заданную графически



ВАРИАНТ 3

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{10n}.$$

2. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n\sqrt{n^4+2}}.$$

3. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\operatorname{arctgn}}}{1+n^2}.$$

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n(2n)!}; \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^8+1}}.$$

5. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)\ln(n+4)}.$$

6. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^{2n}}{3n+2}.$$

7. Разложить функцию f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -2$

$$f(x) = \frac{1}{4+3x}.$$

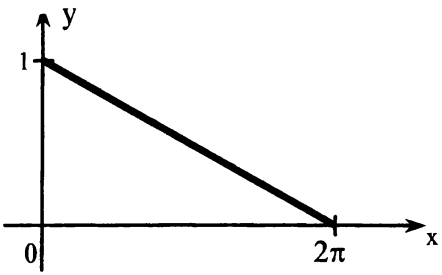
8. Вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,01:

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx.$$

9. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию f(x), заданную на промежутке $(-\pi, \pi)$ выражением

$$f(x)=\begin{cases}-\sin x & -\pi<x<0\\ \sin x & 0<x<\pi\end{cases}, T=2p.$$

10. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию, заданную графически



ВАРИАНТ 4

1. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+3n}}.$$

2. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^2\frac{1}{n}.$$

3. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n};\ \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n^6+4}}.$$

5. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать

сходимость ряда на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{2n+1}}.$$

6. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \ln n}.$$

7. Разложить функцию f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = \frac{1}{2}$

$$f(x) = e^{4x}.$$

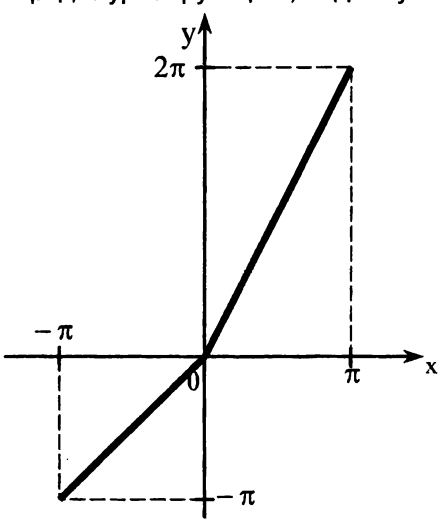
8. Вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,01:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+\sqrt{x})dx.$$

9. Разложить в ряд Фурье по синусам периодическую функцию f(x), заданную на промежутке (0, 2) выражением

$$f(x) = x(2-x),\ 0 < x < 2.$$

10. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически



ВАРИАНТ 5

1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(n+1)}{n+1}.$$

2. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+1}}.$$

3. Исследовать сходимость ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\sin\frac{\pi}{2^n}.$$

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)^n};\ \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln^5 n}.$$

5. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[4]{n^4+n^2+3}}.$$

6. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n^3}}(x+5)^n.$$

7. Разложить функцию f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, используя известные ряды Маклорена, и указать интервал сходимости полученного ряда к порождающей функции

$$f(x) = \cos\frac{\pi x}{6},\ x_0 = -3.$$

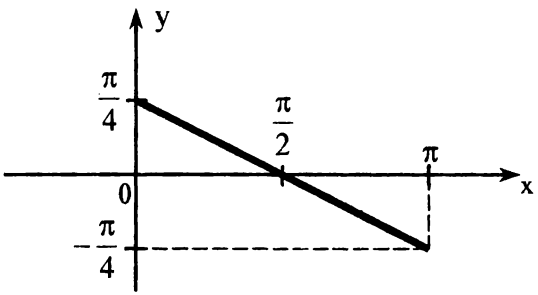
8. Вычислить приближенно интеграл с точностью до 0,001:

$$\int_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$$

9. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию f(x), заданную на промежутке (-1, 1) выражением

$$f(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 0 \\ 3x & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

10. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию, заданную графически



ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1.	Исследование сходимости знакоположительного ряда с помощью признака Даламбера	1. Найти предел общего члена ряда. Если этот предел отличен от нуля, то ряд расходится. 2. Составить варианту Даламбера $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. 3. Найти предел варианты Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$. 4. Сделать вывод о сходимости и расходимости ряда, используя правило а) если $d < 1$, то ряд сходится; б) если $d > 1$, то ряд расходится; в) $d = 1$, то ничего определенного сказать нельзя, требуется дополнительное исследование
2.	Исследование сходимости знакоположительного ряда с помощью интегрального признака Коши-Маклорена	1. Найти предел общего члена ряда. Если этот предел отличен от нуля, то ряд расходится. 2. Составить порождающую функцию f(x): в формуле для общего члена ряда заменить переменную n непрерывной переменной x. 3. Проверить, что порождающая функция f(x) удовлетворяет условиям признака Коши-Маклорена: положительна, непрерывна и монотонно убывает на $[1, \infty)$. 4. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$. 5. Сделать вывод о сходимости ряда, используя правило: если $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx < \infty$, то ряд сходится; если $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \infty$, то ряд расходится.

№ п/п	Умение	Алгоритмы
3.	Исследовать числовой ряд на абсолютную и условную сходимость	1. Составить ряд B из абсолютных величин членов данного ряда A. 2. Исследовать сходимость полученного ряда B с помощью признаков сходимости знакоположительных рядов. 3. Сделать вывод об абсолютной сходимости исходного ряда, используя правило: если сходится ряд B, то сходится абсолютно исходный ряд A. 4. Если данный ряд не сходится абсолютно, то сделать вывод об условной сходимости ряда, используя правило: если члены ряда A монотонно убывают по абсолютной величине и предел общего члена равен нулю, то ряд A условно сходится.
4.	Найти интервал сходимости степенного ряда, исследовать поведение на границах интервала сходимости	1. Составить ряд из абсолютных величин членов данного ряда. 2. Применить признак Даламбера или радикальный признак Коши, найти интервал сходимости. 3. Исследовать поведение степенного ряда на границах интервала сходимости. 4. Подвести итоги исследования.
5.	Вычислить приближенно интеграл с помощью рядов	1. Разложить подынтегральную функцию в степенной ряд, воспользоваться рядами Маклорена e^x, sin x, cos x, $(1+x)^m$, ln(1 + x), arctg x. 2. Почленно проинтегрировать полученное разложение и получить числовой ряд. 3. Найти оценку остаточного (дополнительного) члена по правилу: а) если ряд знакочередующийся, то ошибка не превосходит по абсолютной величине модуля первого из отброшенных членов; б) для знакоположительных рядов остаточный член оценивается сравнением его с геометрическим убывающим рядом, сумма

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		которого находится по известной формуле $\frac{a}{1-q}$ (метод мажорант); в) если полученный ряд удовлетворяет условиям интегрального признака Коши-Маклорена, то оценка остаточного члена $r_n < \int_n^{\infty} f(x)dx$. 4. В качестве приближенного значения определенного интеграла взять сумму определенного числа членов ряда (в зависимости от требуемой точности).
6.	Разложение в ряд Фурье периодической функции, заданной на $(-\pi, \pi)$ или $(-l, l)$	1. Сделать чертеж, при этом, если функция задана на периоде [например, $(-\pi,\pi)$], продолжить ее периодически на всю числовую ось. 2. Проверить условия теоремы Дирихле для данной функции: а) ограничена; б) кусочно-монотонна. 3. Выяснить четность и нечетность функции. 4. Вычислить коэффициенты Фурье по правилам: а) если функция задана на $(-\pi, \pi)$, то $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ $(n = 0, 1, \ldots)$; $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$ $(n = 1, 2, \ldots)$; б) если функция задана на $(-l, l)$, то $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l} dx$ $(n = 0, 1, \ldots)$; $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l} dx$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		Если функция f(x) четная, то $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ (n = 0, 1, 2,...), $b_n=0$ $a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$ (n = 0, 1,...), $b_n=0$ Если функция f(x) нечетная, то $a_n = 0$ (n = 0,1,...), $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ (n = 1, 2, ...) $a_n = 0$ (n = 0,1,...), $b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$ (n = 1, 2, ...). 5. Составить ряд Фурье функции f(x), при этом в случае четной функции он должен содержать лишь косинусы, а для нечетной функции – лишь синусы. 6. Сделать вывод о сходимости полученного ряда Фурье, используя правило: сумма ряда равна: а) $f(x)$ в тех внутренних точках интервала $(-\pi, \pi)$ [или $(-l, l)$], в которых функция непрерывна; б) $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ во всех точках разрыва функции f(x); в) $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$ (или $\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$) на концах интервала.

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 1

Задание

Исследовать сходимость знакоположительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{\sqrt{5^n \cdot n}}$$

с помощью признака Даламбера.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Найти предел общего члена ряда. Если этот предел отличен от нуля, то ряд расходится	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{\sqrt{n5^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{5^{\frac{n}{2}}} = 2\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^{\frac{n}{2}}} = 0$
2.	Составить варианту Даламбера	$a_n = \frac{2n+5}{\sqrt{5^n \cdot n}}$, $a_{n+1} = \frac{2n+7}{\sqrt{(n+1)5^{n+1}}}$ $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+7}{2n+5} \cdot \frac{\sqrt{5^n \cdot n}}{\sqrt{5^{n+1} \cdot (n+1)}}$
3.	Найти предел варианты Даламбера $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$	$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+7}{2n+5} \cdot \frac{\sqrt{5^n}}{\sqrt{5^{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} =$ $= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+7}{2n+5} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$
4.	Сделать вывод о сходимости и расходимости ряда: $d < 1$ – ряд сходится; $d > 1$ – расходится	Так как $d = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$, то ряд сходится

Решите самостоятельно:

Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера:

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n + n^2}$.

1.2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{n!}$.

1.3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{2^n}$.

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3}{3^n + 1}$.

1.5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1)^2}{5^n}$

2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 2

Задание

Исследовать сходимость знакоположительного ряда с помощью интегрального признака Коши-Маклорена:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}.$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Найти предел общего члена ряда. Если этот предел отличен от нуля, то ряд расходится	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}=0$
2.	Составить порождающую функцию f(x). Для этого в формуле для общего члена ряда заменить переменную n непрерывной переменной x	$f(x)=\dfrac{1}{(x+2)\ln^2(x+2)}$
3.	Проверить, что порождающая функция f(x) удовлетворяет условиям признака Коши-Маклорена: положительна, непрерывна и монотонно убывает на [1,+∞)	$\dfrac{1}{(x+2)\ln^2(x+2)}>\dfrac{1}{(x+3)\ln^2(x+3)}$ $(1\le x<\infty)$
4.	Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$	$\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{(x+2)\ln^2(x+2)}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A}\dfrac{dx}{(x+2)\ln^2(x+2)}=$ $=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A}-\dfrac{1}{\ln(x+2)}\Big\vert_1^{A}=\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\ln 3}-\dfrac{1}{\ln(A+2)}\right)=$ $=\dfrac{1}{\ln 3}$
5.	Сделать вывод о сходимости ряда, используя правило: если $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx<\infty$, то ряд сходится;	Интеграл сходится, значит, ряд сходится

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
	если $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$, ряд расходится	

Решите самостоятельно:

Исследовать сходимость ряда с помощью интегрального признака Коши-Маклорена:

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{8n^3+1}$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^3+2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 3

Задание

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n^3-n+3}.$$

Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Составить ряд B из абсолютных величин данного ряда A	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3-n+3}$.
2.	Исследовать сходимость полученного ряда B с помощью необходимого признака и достаточных признаков сходимости знакоположительных рядов	Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3-n+3}$ со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Имеем $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^3-n+3}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)}{n^3-n+3}=1.$
3.	Сделать вывод об абсолютной сходимости исходного ряда, используя правило: если сходится ряд B, то сходится абсолютно ряд A	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3-n+3}$ сходится, значит, исходный ряд сходится абсолютно.
4.	Если данный ряд не сходится абсолютно, то сделать вывод об условной сходимости ряда, используя правило: если члены ряда A монотонно убывают по абсолютной величине и предел общего члена равен нулю, то ряд A условно сходится	

Решите самостоятельно:

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{5n^4+2}$

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{2n^2+3}$

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{2n+5}$

3.4. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{n\ln^4 n}$

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n-1}{4n+1}\right)^{n^2}$

4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 4

Задание

Найти интервал сходимости степенного ряда, исследовать поведение на границах интервала сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(3n+5)(2n+1)}.$$

Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Составить ряд из абсолютных величин членов степенного ряда	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lvert x-1\rvert^n}{(3n+5)(2n+1)}.$
2.	Применить признак Даламбера, получить интервал сходимости	$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lvert x-1\rvert^{n+1}}{(3n+8)(2n+3)}:\frac{\lvert x-1\rvert^n}{(3n+5)(2n+1)}\right)=$ $=\lvert x-1\rvert\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+5)(2n+1)}{(3n+8)(2n+3)}=\lvert x-1\rvert<1$ $0<x<2.$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
3.	Исследовать поведение степенного ряда на границах интервала сходимости	x = 2: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+5)(2n+1)}$, сравним полученный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(3n+5)(2n+1)}:\frac{1}{n^2}\right)=$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(3n+5)(2n+1)}=\frac{1}{6}$, значит, ряд сходится x = 0: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+5)(2n+1)}$. Так как ряд из абсолютных величин сходится, то сходится и данный знакочередующийся ряд
4.	Подвести итог исследования	Данный ряд сходится на промежутке $0 \le x \le 2$

Решите самостоятельно:

Найти интервал сходимости степенного ряда, исследовать поведение на границах интервала сходимости:

4.1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n(x-2)^n}{n^2\ln n}$.

4.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n (x+2)^n}{n \ln n}$.

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{n^2}$.

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{5^n \sqrt[5]{n}}$.

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{3^n \cdot n}$.

5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 5

Задание

Вычислить приближенно определенный интеграл с помощью рядов $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(x^2)dx$ с точностью 0,001.

Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Разложить подынтегральную функцию в степенной ряд, воспользовавшись рядами Маклорена e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$	Используем ряд Маклорена для $\cos x$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$, откуда, заменяя x на x^2, получим $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{12}}{720} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
2.	Почленно проинтегрировать полученное разложение и получить числовой ряд	$\int_0^{\frac{1}{2}}\cos(x^2)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}x^4dx + \frac{1}{24}\int_0^{\frac{1}{2}}x^8dx - \frac{1}{720}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{12}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 5}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9} - \frac{1}{720\cdot 13}\cdot\frac{1}{2^{13}} + \ldots$
3.	Найти оценку остаточного (дополнительного) члена по правилам: а) если ряд знакочередующийся, то ошибка не превосходит по абсолютной величине модуля первого из отброшенных членов; б) для знакоположительных рядов остаточный член оценивается сравнением его с геометрическим убывающим рядом, сумма которого находится по известной формуле $\frac{a}{1-q}$ (метод мажорант); в) если полученный ряд удовлетворяет условиям интегрального признака Коши-Маклорена, то оценка остаточного члена $r_n < \int_n^{\infty} f(x)dx$	Находим первый член меньше, чем 0,001. Это будет $\frac{1}{24\cdot 9\cdot 2^9}$ – третий член. Такое правило применяется, так как это знакочередующийся ряд, в котором $\lvert r_n \rvert \le a_{n+1}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
4.	В качестве приближенного значения определенного интеграла взять сумму определенного числа членов ряда (в зависимости от требуемой точности)	$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(x^2)dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{320} = 0{,}5000 - 0{,}0031$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(x^2)dx \approx 0{,}497$

Решите самостоятельно:

Вычислить приближенное значение определенного интеграла с заданной точностью ε:

5.1. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \qquad \varepsilon = 10^{-4}.$

5.2. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1+x^4} \qquad \varepsilon = 10^{-3}.$

5.3. $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+\sqrt{x})dx \qquad \varepsilon = 10^{-3}$.

5.4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(x^3)}{x^2}dx \qquad \varepsilon = 10^{-3}$.

5.5. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx \qquad \varepsilon = 10^{-2}$.

6. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 6

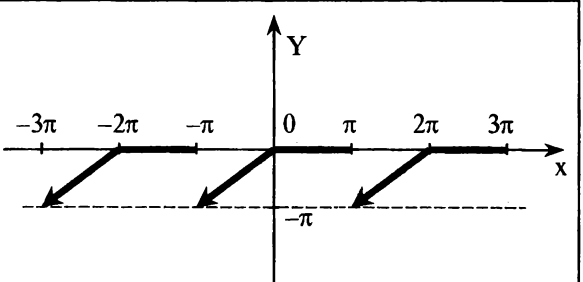
Задание

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } -\pi < x \le 0 \\ 0, \text{ если } \quad 0 < x \le \pi \end{cases} \quad T = 2\pi.$$

Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1.	Сделать чертеж, при этом если функция задана лишь на периоде [например, на $(-\pi,\pi)$], продолжить ее периодически на всю числовую прямую	
2.	Проверить условие теоремы Дирихле для данной функции: а) ограничена б) кусочно-монотонна	а) $\lvert f(x)\rvert \le \pi$ б) на $(0, \pi)$ – постоянна, на $(-\pi, 0)$ – возрастает
3.	Выяснить четность и нечетность функции	Общие положения

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
4.	Вычислить коэффициент Фурье по формулам: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ (n=0, 1, …); $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ (n=1, 2, …). Для четных функций $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ (n=0,1,…); $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ (n=1,2,…).	$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0\,dx = -\frac{\pi}{2}$; $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0\cdot\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx =$ $= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}[1-(-1)^n]$; $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0\cdot\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx =$ $= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cdot\sin nx\,dx = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.
5.	Составить ряд Фурье функции f(x), при этом в случае четной функции он должен содержать лишь косинусы, а для нечетной функции – лишь синусы	$-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]\cos nx +$ $+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sin nx$
6.	Сделать вывод о сходимости полученного ряда Фурье, используя правило: сумма ряда равна: а) f(x) в тех внутренних точках интервала (-π, π), в которых функция непрерывна; б) $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ во всех точках разрыва функции f(x);	Ряд сходится к f(x) при $x \in (-\pi, \pi)$, в точках $\pm\pi$ сходится к $\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2} = \frac{0+(-\pi)}{2} = -\frac{\pi}{2}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
	в) $\frac{1}{2}[f(-\pi-0)+f(\pi+0)]$ на концах интервала	

Решите самостоятельно:

6.1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = x - 1 \ (-2 < x < 2).$$

6.2. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = x + 2 \ (0 < x < 2).$$

6.3. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \ (0 < x < \pi).$$

6.4. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) := x(2-x)\ (0 \le x \le 2)\ .$$

6.5. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-2x & 0<x\le\pi\\ 5x & -\pi\le x\le 0\end{cases}.$$

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998
Казахстанско-Российский университет
Объем 11,3 п.л. Тираж 1888